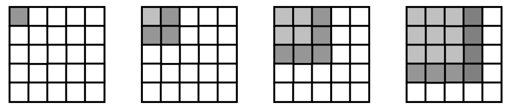
❶ Wir entdecken Rechenvorteile

1	=1
1+3	=4
1+3+5	=9
. . .	. . .
1+3+5+...+...	=625

Wie wird es weitergehen?



. . .

Berechne.

1·1	6·6	11·11	16·16
2·2			
3·3			
4·4			
5·5			

Rechne mit dem Taschenrechner. **Entdecke Rechenvorteile!**

72·68=

21·19=

41·39=

18·22=

16·24=

89·91=

58·62=

63·57=

46·54=

35·45=

77·83=

Nun rechne im Kopf. Kontrolliere mit dem Taschenrechner.

28·32=

29·31=

99·101=

103·97=

17·23=

8·12=

98·102=

48·52=

44·36=

33·26=

54·46=

❷ Wir entdecken Rechenvorteile

Carl Friedrich Gauß

Carl Friedrich Gauß lebte von 1777 bis 1855 und war ein berühmter Mathematiker.

Als er neun Jahre alt war, so erzählt man sich, soll er die Aufgabe erhalten haben, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Er verblüffte seinen Lehrer, als er nur wenige Minuten für die Lösung brauchte.

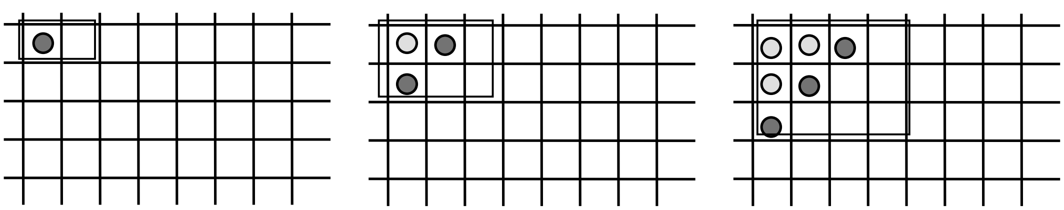
1	=1
1+2	=3
1+2+3	=6
. . .	
1+2+3+...+50	=1275

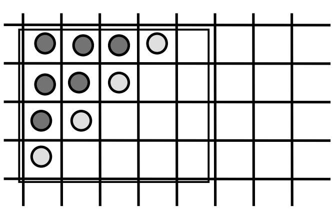
Wie könnte es weitergehen?

1+2+3+4+5+ ... +96+97+98+99+100= ?

Nimm ein großes Blatt kariertes Papier und zeichne für jede Aufgabe ein Rechteck und zeichne die Zahlen geschickt ein (siehe Beispiele).

Wie könnte der kleine Gauß gerechnet haben?





Wenn die Rechtecke noch nicht „helfen“, dann versuche einmal, besondere Paare zu bilden.

Schreibe die gefundene Rechenvorschrift auf und nutze sie zur Berechnung der folgenden Aufgaben.

- ❍ Welches Ergebnis erhielt der kleine Gauß?
- ❍ Berechne 1+2+3+...+998+999+1000.
- ❍ Eine Turmuhr schlägt nur zur vollen Stunde: um 1 Uhr einmal, um 2 Uhr zweimal, um 13 Uhr einmal usw. Wie oft schlägt sie an einem Tag?

❸ Wir entdecken Rechenvorteile

Brit rechnet Multiplikationsaufgaben, bei denen beide Zahlen zwischen 10 und 20 liegen, auf folgende geheimnisvolle Weise:

- *Zur ersten Zahl addiere ich die Einer der zweiten Zahl.*
- *Dann hänge ich an das Ergebnis eine Null an.*
- *Nun addiere ich noch das Produkt der beiden Einer.*

Beispiel: $16 \cdot 13 = 208$

$16 + 3 = 19$ → 190 → $190+6 \cdot 3 = 190+18 = 208$

Berechne solche Produkte mit Brit's Verfahren und kontrolliere mit dem Taschenrechner. Berechne auch geeignete Quadratzahlen auf diese Weise.

Untersuche dieses Verfahren nun einmal genauer mit den folgenden Aufgaben. Kariertes Papier zum Ausschneiden oder das 400er - Quadrat könnten auch eine Hilfe sein.

$14 \cdot 13$

	10	3	
10	100	30	130
4	40	12	52
	140	42	<u>182</u>

$16 \cdot 13$

$15 \cdot 19$

$8 \cdot 18$

$19 \cdot 17$

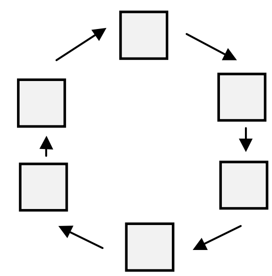
$16 \cdot 18$

Seltsame Zahlen

Was stellst du fest ? **Suche auch nach einer Erklärung !**

Die seltsame Zahl 142 857

- Multipliziere 142 857 mit 2; 3; 4; 5 und 6.
- Multipliziere mit 8; 9; ...
- Multipliziere mit 7.



Die seltsame Zahl 37 037

Multipliziere 37 037 mit einer Zahl zwischen 2 und 27.

3 · 37	3 · 37037
6 · 37	6 · 37037
9 · 37	9 · 37037

Multipliziere eine einstellige Zahl (Kettenaufgabe) mit 3, 7, 11, 13 und 37.

Nimm die Zahl 8833 und „teile“ sie in der Mitte zu 88 und 33. Multipliziere 88 mit sich selbst und auch 33 mit sich selbst. Addiere beide Produkte.

... Addiere ...

12 33	588 2353	10 100

... Subtrahiere ...

4 8	34 68	10 101	16 128

Ein 6stellige Zahl der Form ❐❍◆❐❍◆ ist nacheinander durch 7, durch 11 und durch 13 zu dividieren.

❶ "Denke dir eine Zahl . . ."

1

Denke dir eine Zahl zwischen 500 und 1 000 und zähle 871 dazu. Den Tausender streiche weg und zähle ihn bei der Einerziffer dazu. Ziehe das Ergebnis von deiner gedachten Zahl ab.

Wiederhole diese Berechnung mehrmals mit unterschiedlichen Zahlen. ...

2

Denke dir eine Zahl. Addiere zum 3fachen der gedachten Zahl 892. Addiere zu der gedachten Zahl 424. Subtrahiere die beiden Ergebnisse voneinander und halbiere die Differenz. Davon ziehst du jetzt noch die gedachte Zahl ab.

Wiederhole diese Berechnung mehrmals mit unterschiedlichen Zahlen. ...

3

Denke dir eine dreistellige Zahl, bei der die erste und die letzte Ziffer eine Differenz von mindestens 2 haben. Schreibe die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge auf (Spiegelzahl) und subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl.
Bilde erneut die Spiegelzahl und addiere diese zum Ergebnis der Subtraktion.

Wiederhole diese Berechnung mehrmals mit unterschiedlichen Zahlen. ...

❷ "Denke dir eine Zahl . . ."

1

Denke dir eine beliebige dreistellige Zahl, bei der nicht alle Ziffern gleich sind. Die erste und die letzte Ziffer der Zahl sollen eine Differenz größer als 1 haben. Bilde von dieser Zahl die Spiegelzahl und ermittle die Differenz („größere minus kleinere“).
Von dieser Differenz bilde wieder die Spiegelzahl usw.
Es wird behauptet, dass dabei als Differenz die Zahl 495 mit vorkommt.

Probiere dieses Verfahren für eine vierstellige Zahl!

2

Denke dir eine fünfstellige Zahl. Verdopple diese Zahl und addiere 5. Multipliziere diese neue Zahl mit 50 und addiere dein Alter zum Ergebnis. Dann addiere noch die Tage eines Jahres (365) und subtrahiere 615.
Das Ergebnis wird eine besondere siebenstellige Zahl sein. Zerlege diese siebenstellige Zahl in eine fünfstellige und eine zweistellige Zahl.
Wiederhole diese Berechnung mehrmals mit unterschiedlichen Zahlen. ...

3

Addiere zum Doppelten deines Geburtstages 5 und multipliziere dann mit 50. Addiere nun deinen Geburtsmonat (1 bis 12) und subtrahiere 250.

Das Ergebnis wird eine besondere drei- oder vierstellige Zahl sein.

Besondere Eigenschaften von Zahlen

... entdecken durch Wiederholung einer Folge von Anweisungen.

Führe die Wiederholungen nur so lange durch, bis du eine besondere Eigenschaft gefunden hast, die vermutlich nicht nur für dein Beispiel gilt.

(1) Zweistellige Zahlen

(1) Nimm als Startzahl eine zweistellige natürliche Zahl mit unterschiedlichen Ziffern.
(2) Vertausche die beiden Ziffern.
(3) Subtrahiere nun die kleinere Zahl von der größeren.
(4) Diese Differenz ist die neue Startzahl. Gehe zu (2).

(1)	(2)	(3)	(4)
Zum Beispiel: 84	48	84-48=36	36
	63	63-36=27	27
	72	usw.	

(2) Dreistellige Zahlen

(1) Nimm eine dreistellige natürliche Zahl mit unterschiedlichen Ziffern.
(2) Bilde aus diesen Ziffern die größt mögliche Zahl.
(3) Bilde aus diesen Ziffern die kleinst mögliche Zahl.
(4) Subtrahiere nun die kleinere Zahl von der größeren.
(5) Diese Differenz ist die neue Startzahl. Gehe zu (2).

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Zum Beispiel: 391	931	139	931-139=792	792
	972	279	972-279=693	693
	963	usw.		

(3) Spiegelzahlen

(1) Nimm als Startzahl eine beliebige vierstellige Zahl mit unterschiedlichen Ziffern.
Die erste und die letzte Ziffer sollen eine Differenz größer als 1 haben.
(2) Bilde von dieser Zahl die Spiegelzahl.
(3) Subtrahiere nun die kleinere Zahl von der größeren.
(4) Diese Differenz ist die neue Startzahl. Gehe zu (2).

(1)	(2)	(3)	(4)
Zum Beispiel: 1346	6431	6431-1346=5085	5085
	5805	5805-5085=0720	usw.

Wiederhole ... bis ...

1 “ 3 • n + 1 ”

(1) Nimm eine natürliche Zahl.
(2) Wenn diese Zahl gerade ist, dann dividiere sie durch 2, sonst multipliziere sie mit 3 und addiere zum Produkt 1.
(3) Wenn du die Zahl 1 erreicht hast, dann beende die Berechnung, sonst nimm die neu entstandene Zahl und gehe zu (2).

Beispiel:

Schritt					
(1)	30				
(2)	30:2=15 ↗	15•3+1=46 ↗	46:2=23 ↗	23*3+1=70 ↗	...
(3)	15	46	23	70	

Untersuche die Zahlen 23, 49, 47 und weitere.
Es wird hehauptet, dass man für jede natürliche Zahl n als Startzahl (n>0) am Ende immer 1 erhält.

2 Die KAPREKAR - Zahl

Der indische Mathematiker KAPREKAR stellte 1949 eine interessante Eigenschaft vierstelliger natürlicher Zahlen fest, die wir durch folgende Vorschrift ermitteln wollen:

(1) Nimm eine vierstellige natürliche Zahl n (n>1000), deren vier Ziffern nicht alle gleich sein dürfen.
(2) Bilde aus diesen vier Ziffern die größt mögliche Zahl.
(3) Bilde aus diesen vier Ziffern die kleinst mögliche Zahl.
(4) Ermittle die Differenz aus größter (2) und kleinster Zahl (3).
(5) Wenn die Differenz gleich der KAPREKAR-Zahl ist, dann beende die Berechnung, sonst ist die Differenz (4) die neue Zahl und gehe zu (2).

Finde diese Eigenschaft - die *KAPREKAR-Zahl* - selbst.