*Erschienen in: Jahresbericht Dtsch. Mathematiker-Vereinigung **101.1** (1999) 8–10*

Bertoin, J., Lévy Processes (Cambridge Tracts in Mathematics Vol. 121), Cambridge u.a.: Cambridge University Press 1996, x + 265 S., GB-£35.00, US-$ 54.95. ISBN: 0–521–56243–0.

Lévy-Prozesse sind stochastische Prozesse mit unabhängigen und stationären Zuwächsen. Synonym findet man auch die auf K. Itô bzw. H. P. McKean zurückgehenden Bezeichnungen *additive process* oder *differential process*. Auf Grund ihrer speziellen Struktur—die endlichdimensionalen Verteilungen des Prozesses sind unbeschränkt teilbar und unter Translationen invariant—bilden die Lévy-Prozesse eine besonders einfache aber dennoch reichhaltige Unterklasse der Markov-Prozesse. Ihre prominentesten Vertreter, die Brownsche Bewegung und der Poisson-Prozeß, haben mittlerweile in jeder weiterführenden Vorlesung über Wahrscheinlichkeitstheorie ihren festen Platz. Es ist aber nicht nur die Stochastik, für die das Studium von Lévy-Prozessen lohnend ist. Durch die enge Beziehung unbeschränkt teilbarer Verteilungen zu Faltungshalbgruppen und den davon erzeugten Operatorenhalbgruppen werden Techniken aus der Fourier- und harmonischen Analysis unmittelbar anwendbar und führen zu schönen Resultaten, Beispielen und neuen Interpretationen.

Um so erstaunlicher ist, daß bisher die Lévy-Prozesse noch nicht im Rahmen einer eigenständigen Monographie behandelt wurden. Manche Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitstheorie beinhalten einen Abschnitt über Lévy-Prozesse, die Darstellung erschöpft sich aber zumeist in der Konstruktion der Prozesse. In der stochastischen Analysis (von *Sprung*prozessen) werden Lévy-Prozesse im Rahmen der Semimartingale mitentwickelt, siehe z.B. die Darstellungen von J. Jacod & A. N. Shiryaev, Ph. Protter oder N. Ikeda & S. Watanabe, fristen aber ein Randdasein als (strukturell einfache) Beispiele. Das Buch von Chr. Berg & G. Forst stellt die Potentialtheorie von Faltungshalbgruppen umfassend dar, erwähnt aber den Zusammenhang zu stochastischen Prozessen nur in einer kurzen Bemerkung und klammert die probabilistische Sichtweise weitgehend aus. Eine kürzlich erschienene Monographie von N. Jacob über Lévy-Typ-Prozesse weist auf die Bedeutung der Lévy-Prozesse im Spannungsfeld zwischen Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie hin, behandelt jedoch schwerpunktmäßig den nicht translationsinvarianten Fall. Schließlich sind noch die Bücher von A. V. Skorokhod *Random Processes With Independent Increments*, Kluwer, Dordrecht 1991, und von

K. Sato zu erwähnen, wobei doch das erste auf ein russisches Original von 1964 zurückgeht und neuere Entwicklungen nicht berücksichtigt, das zweite in Japanisch erschienen aber noch in keiner Übersetzung verfügbar ist. Außerdem gibt es eine Reihe von lesenswerten Übersichtsartikeln von S. J. Taylor (1973), B. Fristedt (1974) und N. Bingham (1975), doch sind diese in ihrem Charakter und Intention nicht mit einer Monographie oder gar einem Lehrbuch zu vergleichen.

Ein Buch über Lévy-Prozesse ist daher begrüßenswert, zumal wenn der Autor betont: *one of our main concerns [...] will be to relate analytic properties of the characteristic exponent* [d. i. der Logarithmus der Fouriertransformierten der eindimensionalen Verteilung zur Zeit $t = 1$] *with the probabilistic behaviour of the Lévy process* (S. 12) und die Darstellung nicht technisch sein soll. *I endeavoured to make [the text] as self-contained as possible; the prerequisite is limited to standard notions in probability and Fourier analysis. [...] We stress that no prior knowledge of Markov processes is assumed.* (S. ix)

Welchen Standard der Autor dabei im Auge hat, zeigt die Ouvertüre, wo er auf knappen zehn Seiten reguläre bedingte Verteilungen, unbeschränkt teilbare Verteilungen, Martingaltheorie, Poissonprozeß, *Poisson random measures*, Poisson-Punktprozesse, Brownsche Bewegung und Karamata-Theorie Revue passieren läßt. Mit diesem Rüstzeug kann die eigentliche Lektüre beginnen. Auf den ersten 100 Seiten, Kapitel I mit III, werden zielstrebig Lévy-Prozesse konstruiert, deren starke Markov-Eigenschaft nachgewiesen, globales Verhalten der Prozesse untersucht und eine Einführung in die (probabilistische) Potentialtheorie gegeben werden. Genaueres Augenmerk erfahren Subordinatoren, das sind Lévy Prozesse auf $\mathbb{R}_+$ mit fast sicher wachsenden Pfaden, deren Eintrittsverteilungen, Wachstumseigenschaften und Hausdorff-Dimension behandelt werden.

Diesem ersten in sich abgeschlossenen Teil folgt auf 140 weiteren Seiten (Kapitel IV bis VIII) eine Einführung in die Fluktuationstheorie eindimensionaler Lévy-Prozesse. Eröffnet wird dieser Teil mit dem Studium von Lokalzeiten von Markov-Prozessen (mit Hilfe von Exkursionen des Prozesses) und von Lévy-Prozessen. Insbesondere werden hinreichende und notwendige Kriterien für die Existenz und hinreichende Kriterien für die Raum-Zeit-Stetigkeit der Lokalzeiten von Lévy-Prozessen bewiesen. Der *ladder process* $\left\{\left(L^{-1}(t), S(L^{-1}(t))\right)\right\}_{t\geq 0}$, $S(t)$ bezeichnet das Maximum des Prozesses auf $[0, t]$, steht nun im Mittelpunkt der Fluktuationstheorie: unter schwachen zusätzlichen Annahmen ist er selbst ein Lévy-Prozeß, und die genaue Kenntnis seines charakteristischen Exponenten erlaubt Aussagen über die Extremalverteilungen des ursprünglichen Lévy-Prozesses, das Verhalten seiner Pfade im Unendlichen und die Existenz von Wachstumspunkten. Haben die Prozesse nur negative Sprünge oder sind die Verteilungen stabil zum Index $\alpha \in (0,2)$, so können weitergehende Resultate abgeleitet werden, etwa über Austrittszeiten oder gewisse Pfadtransformationen: *conditioning to stay positive, stable bridges, meander*.

Jedes Kapitel schließt mit Kommentaren und Aufgaben, die die Themenauswahl abrunden und ergänzen. Die Aufgaben sind z. T. Originalarbeiten entnommen, jedoch mit Lösungshinweisen oder genauen Quellenangaben versehen. Angesichts der Reichhaltigkeit des Gebiets war die Auswahl der Themen nicht einfach. Die Einschränkung auf die Fluktuationstheorie, ein Forschungsgebiet des Autors, ist kanonisch und zugleich überaus geglückt. Bewußt werden Fragestellungen und Techniken der stochastischen Analysis, abgesehen von Punktprozessen, ausgeklammert und auf die Darstellungen von J. Jacod & A. N. Shiryaev oder Ph. Protter verwiesen. Der gefälligen Konzeption und Stoffauswahl stehen einige Mängel in der Aufbereitung des Materials entgegen. Die Beweise sind bisweilen lakonisch kurz und der Leser ist an einigen Stellen mit einer Gebrauchsanweisung allein gelassen, die allerdings zu einem eigenständigen Beweis führen kann. Im Hinblick auf das Methodenkapitel auf den ersten zehn Seiten mag das Buch als *self-contained* gelten, doch ist es für das Verständnis der Argumente durchaus hilfreich, die Bücher von D. Revuz & M. Yor und C. Dellacherie & P. A. Meyer bzw. C. Dellacherie, B. Maisonneuve & P. A. Meyer zur Hand zu haben.

Ein wirkliches Ärgernis sind die vielen Druckfehler, v. a. im zweiten Teil des Buchs, Zitate von Arbeiten, die in der Bibliographie nicht erscheinen, und der wenig professionelle (TeX-) Schriftsatz, der an mancher Stelle das Lesen von Formeln erschwert. Der Eindruck, daß das Buch schnell geschrieben wurde und ein sorgfältiges Lektorat seitens des Verlags unterblieb, drängt sich geradezu auf.

Trotzdem möchte ich jedem Mathematiker mit soliden Vorkenntnissen in der Theorie der Markovschen Prozesse dieses Buch ans Herz legen. Es besticht durch eine schöne, wenn auch knappe, Darstellung der Lévy-Prozesse, die auch neuere Ergebnisse berücksichtigt, und ist eine Fundgrube für Techniken und Beispiele; das Literaturverzeichnis ist umfassend. Für Neueinsteiger in die Theorie sind die ersten drei Kapitel allenfalls bedingt geeignet. Schade nur, daß die Einstiegshürde so hoch angesetzt ist und daß dem Analytiker aus der Harmonischen Analysis oder Fourieranalysis auch dieses Buch nicht den Zugang zu Lévy-Prozessen öffnen wird.

Erlangen R. L. Schilling