Lineare Prognosen in der Schadenreservierung

Klaus D. Schmidt

Lehrstuhl für Versicherungsmathematik
Technische Universität Dresden

Technische Universität Wien
15. Mai 2006

Übersicht

- Das Prognose–Problem
- Bayes–Prognosen
- Credibility–Prognosen
- Prognosen in der Schadenreservierung
- Prognosen im Modell von Witting

Übersicht

- Das Prognose–Problem
- Bayes–Prognosen
- Credibility–Prognosen
- Prognosen in der Schadenreservierung
- Prognosen im Modell von Witting

Prognose für eine Zufallsvariable (1)

Gegeben seien Zufallsvariable $X_0, X_1, \ldots, X_m$ derart, dass $X_1, \ldots, X_m$ beobachtbar sind und X_0 nicht beobachtbar ist.
Eine Zufallsvariable

$$\delta(X_0)$$

heißt Prädiktor von X_0, wenn es eine messbare Funktion $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\delta(X_0) = h(X_1, \ldots, X_m)$$

Ein Prädiktor $\delta^*(X_0) \in \Delta$ heißt optimal bezüglich einer Klasse Δ von zulässigen Prädiktoren, wenn er den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$\mathrm{E}\left[\Big(\delta(X_0) - X_0\Big)^2\right]$$

über alle Prädiktoren $\delta(X_0) \in \Delta$ minimiert.

Prognose für eine Zufallsvariable (2)

Gegeben sei eine Zufallsvariable X_0 und ein Zufallsvektor $\mathbf{X}$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$ derart, dass $\mathbf{X}$ beobachtbar ist und X_0 nicht beobachtbar ist. Eine Zufallsvariable

$$\delta(X_0)$$

heißt Prädiktor von X_0, wenn es eine messbare Funktion $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\delta(X_0) = h(\mathbf{X})$$

Ein Prädiktor $\delta^*(X_0) \in \Delta$ heißt optimal bezüglich einer Klasse Δ von zulässigen Prädiktoren, wenn er den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$\mathrm{E}\left[\left(\delta(X_0) - X_0\right)^2\right]$$

über alle Prädiktoren $\delta(X_0) \in \Delta$ minimiert.

Prognose für einen Zufallsvektor

Gegeben seien Zufallsvektoren $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{X}_1$ mit Werten in $\mathbb{R}^{m_0}$ bzw. $\mathbb{R}^{m_1}$ derart, dass $\mathbf{X}_1$ beobachtbar ist und $\mathbf{X}_0$ nicht beobachtbar ist, sowie eine Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times m_0}$. Ein Zufallsvektor

$$\delta(\mathbf{D}\mathbf{X}_0)$$

mit Werten in $\mathbb{R}^n$ heißt Prädiktor von $\mathbf{D}\mathbf{X}_0$, wenn es eine messbare Abbildung $h : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\delta(\mathbf{D}\mathbf{X}_0) = h(\mathbf{X}_1)$$

Ein Prädiktor $\delta^*(\mathbf{D}\mathbf{X}_0) \in \Delta$ heißt optimal bezüglich einer Klasse Δ von zulässigen Prädiktoren, wenn er den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$\mathrm{E}\left[\Big(\delta(\mathbf{D}\mathbf{X}_0) - \mathbf{D}\mathbf{X}_0\Big)'\Big(\delta(\mathbf{D}\mathbf{X}_0) - \mathbf{D}\mathbf{X}_0\Big)\right]$$

über alle Prädiktoren $\delta(\mathbf{D}\mathbf{X}_0) \in \Delta$ minimiert.

Reduktion des Prognose–Problems

Gegeben seien Zufallsvektoren $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ derart, dass $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ beobachtbar sind und $\mathbf{X}_0$ nicht beobachtbar ist.
Ein Zufallsvektor

$$\delta(\mathbf{X}_0)$$

mit Werten in $\mathbb{R}^{m_0}$ heißt Prädiktor von $\mathbf{X}_0$, wenn es eine messbare Abbildung $h : \mathbb{R}^{m_1 \times m_2} \to \mathbb{R}^{m_0}$ gibt mit

$$\delta(\mathbf{X}_0) = h(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$$

Reduktion des Prognose–Problems: Finde Bedingungen an $\mathbf{X}_2$, unter denen es eine messbare Abbildung $h_1 : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_0}$ gibt mit

$$\delta^*(\mathbf{X}_0) = h_1(\mathbf{X}_1)$$

Übersicht

- Das Prognose–Problem
- Bayes–Prognosen
- Credibility–Prognosen
- Prognosen in der Schadenreservierung
- Prognosen im Modell von Witting

Prognose für eine Zufallsvariable (1)

Gegeben seien Zufallsvariable $X_0, X_1, \ldots, X_m$ derart, dass $X_1, \ldots, X_m$ beobachtbar sind und X_0 nicht beobachtbar ist.
Eine Zufallsvariable

$$\delta^{\text{Bayes}}(X_0)$$

heißt Bayes–Prädiktor von X_0, wenn sie den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$\mathrm{E}\left[\Big(\delta(X_0) - X_0\Big)^2\right]$$

über alle Prädiktoren $\delta(X_0) \in \Delta^{\text{Bayes}}$ mit

$$\Delta^{\text{Bayes}} := \left\{ h(X_1, \ldots, X_m) \,\middle|\, h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} messbar \right\}$$

minimiert.

Prognose für eine Zufallsvariable (2)

Satz. Es existiert ein eindeutig bestimmter Bayes–Prädiktor $\delta^{\text{Bayes}}(X_0)$ von X_0 und es gilt

$$\delta^{\text{Bayes}}(X_0) = \mathrm{E}(X_0 \mid X_1, \ldots, X_m)$$

Bemerkungen:

- Die Bestimmung des Bayes–Prädiktors von X_0 erfordert die Kenntnis der gemeinsamen Verteilung von $X_0, X_1, \ldots, X_m$.
- Die gemeinsame Verteilung von $X_0, X_1, \ldots, X_m$ wird oft indirekt durch die bedingte gemeinsame Verteilung von $X_0, X_1, \ldots, X_m$ unter einem zufälligen Risikoparameter Λ und die Verteilung von Λ angegeben.
- In speziellen Fällen, aber nicht immer, ist der Bayes–Prädiktor von X_0 eine affin–lineare Funktion von $X_1, \ldots, X_m$.

Prognose für eine Zufallsvariable (3)

Gegeben sei eine Zufallsvariable X_0 und ein Zufallsvektor $\mathbf{X}$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$ derart, dass $\mathbf{X}$ beobachtbar ist und X_0 nicht beobachtbar ist. Eine Zufallsvariable

$$\delta^{\text{Bayes}}(X_0)$$

heißt Bayes–Prädiktor von X_0, wenn sie den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$\mathrm{E}\left[\Big(\delta(X_0) - X_0\Big)^2\right]$$

über alle Prädiktoren $\delta(X_0) \in \Delta^{\text{Bayes}}$ mit

$$\Delta^{\text{Bayes}} := \left\{ h(\mathbf{X}) \,\middle|\, h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \text{ messbar} \right\}$$

minimiert.

Prognose für eine Zufallsvariable (4)

Satz. Es existiert ein eindeutig bestimmter Bayes–Prädiktor $\delta^{\text{Bayes}}(X_0)$ von X_0 und es gilt

$$\delta^{\text{Bayes}}(X_0) = \mathrm{E}(X_0 \mid \mathbf{X})$$

Prognose für einen Zufallsvektor (1)

Gegeben seien Zufallsvektoren $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{X}_1$ mit Werten in $\mathbb{R}^{m_0}$ bzw. $\mathbb{R}^{m_1}$ derart, dass $\mathbf{X}_1$ beobachtbar ist und $\mathbf{X}_0$ nicht beobachtbar ist, sowie eine Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times m_0}$. Ein Zufallsvektor

$$\delta^{\text{Bayes}}(\mathbf{D}\mathbf{X}_0)$$

mit Werten in $\mathbb{R}^n$ heißt Bayes–Prädiktor von $\mathbf{D}\mathbf{X}_0$, wenn er den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$\mathrm{E}\left[\Big(\delta(\mathbf{D}\mathbf{X}_0) - \mathbf{D}\mathbf{X}_0\Big)'\Big(\delta(\mathbf{D}\mathbf{X}_0) - \mathbf{D}\mathbf{X}_0\Big)\right]$$

über alle Prädiktoren $\delta(\mathbf{D}\mathbf{X}_0) \in \Delta^{\text{Bayes}}$ mit

$$\Delta^{\text{Bayes}} := \left\{ h(\mathbf{X}_1) \,\middle|\, h : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^n \text{ messbar} \right\}$$

minimiert.

Prognose für einen Zufallsvektor (2)

Satz. Es existiert ein eindeutig bestimmter Bayes–Prädiktor $\delta^{\text{Bayes}}(\mathbf{DX}_0)$ von $\mathbf{DX}_0$ und es gilt

$$\delta^{\text{Bayes}}(\mathbf{DX}_0) = \mathbf{D}\,\mathrm{E}(\mathbf{X}_0 \mid \mathbf{X}_1)$$

Insbesondere gilt

$$\delta^{\text{Bayes}}(\mathbf{DX}_0) = \mathbf{D}\,\delta^{\text{Bayes}}(\mathbf{X}_0)$$

Aufgrund des Satzes genügt es, den Bayes–Prädiktor $\delta^{\text{Bayes}}(\mathbf{X}_0)$ von $\mathbf{X}_0$ zu bestimmen. Es genügt sogar, nur die Bayes–Prädiktoren der einzelnen Koordinaten von $\mathbf{X}_0$ zu bestimmen.

Reduktion des Prognose–Problems

Gegeben seien Zufallsvektoren $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ derart, dass $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ beobachtbar sind und $\mathbf{X}_0$ nicht beobachtbar ist.
Dann gilt für den Bayes–Prädiktor von $\mathbf{X}_0$

$$\delta^{\text{Bayes}}(\mathbf{X}_0) = \mathrm{E}(\mathbf{X}_0 \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$$

Satz. Ist $\mathbf{X}_2$ unabhängig von $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{X}_1$, so gilt

$$\delta^{\text{Bayes}}(\mathbf{X}_0) = \mathrm{E}(\mathbf{X}_0 \mid \mathbf{X}_1)$$

Übersicht

- Das Prognose–Problem
- Bayes–Prognosen
- Credibility–Prognosen
- Prognosen in der Schadenreservierung
- Prognosen im Modell von Witting

Prognose für eine Zufallsvariable (1)

Gegeben seien Zufallsvariable $X_0, X_1, \ldots, X_m$ derart, dass $X_1, \ldots, X_m$ beobachtbar sind und X_0 nicht beobachtbar ist.
Eine Zufallsvariable

$$\delta^{\text{Cred}}(X_0)$$

heißt Credibility–Prädiktor von X_0, wenn sie den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$\mathrm{E}\left[\Big(\delta(X_0) - X_0\Big)^2\right]$$

über alle Prädiktoren $\delta(X_0) \in \Delta^{\text{Cred}}$ mit

$$\Delta^{\text{Cred}} := \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i\, X_i \;\middle|\; a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R} \right\}$$

minimiert.

Prognose für eine Zufallsvariable (2)

Die Menge

$$\Delta^{\text{Cred}} := \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i X_i \;\middle|\; a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R} \right\}$$

ist wegen

$$\Delta^{\text{Cred}} = \text{span}\{1, X_1, \ldots, X_m\}$$

eine abgeschlossene lineare Teilmenge des Hilbert–Raumes L^2 der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen.

Satz. Es existiert ein eindeutig bestimmter Credibility–Prädiktor $\delta^{\text{Cred}}(X_0)$ von X_0.

Aus dem Satz folgt jedoch nicht, dass auch die Koeffizienten von $\delta^{\text{Cred}}(X_0)$ eindeutig bestimmt sind.

Prognose für eine Zufallsvariable (3)

Die Koeffizienten des Credibility–Prädiktors

$$\delta^{\text{Cred}}(X_0) := a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \, X_i$$

sind Lösungen der Normalgleichungen

$$\mathrm{E}\left[\left(a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \, X_i\right) Z\right] = \mathrm{E}[X_0 \, Z]$$

mit $Z \in \{1, X_1, \ldots, X_m\}$. Daraus erhält man

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \, \mathrm{E}[X_i] &= \mathrm{E}[X_0] \\ a_0 \, \mathrm{E}[X_k] + \sum_{i=1}^{m} a_i \, \mathrm{E}[X_i X_k] &= \mathrm{E}[X_0 X_k] \qquad (k = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

Prognose für eine Zufallsvariable (4)

Umformung ergibt

$$
\begin{aligned}
a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \, \mathrm{E}[X_i] &= \mathrm{E}[X_0] \\
\sum_{i=1}^{m} a_i \, \mathrm{cov}[X_i, X_k] &= \mathrm{cov}[X_0, X_k] \qquad (k = 1, \dots, m)
\end{aligned}
$$

In Vektornotation erhält man

$$
\begin{aligned}
a_0 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu} &= \mu_0 \\
\mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma} &= \varrho'
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt

$$
\delta^{\text{Cred}}(X_0) = a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{X}
$$

Prognose für eine Zufallsvariable (5)

Satz. Ist $\boldsymbol{\Sigma}$ invertierbar, so gilt

$$\delta^{\text{Cred}}(X_0) = \mu_0 + \boldsymbol{\varrho}' \, \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \Big(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} \Big)$$

Prognose für eine Zufallsvariable (6)

Standard Credibility–Modell: Es gibt $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ und eine positiv definite Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Phi} = \text{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ mit $1 + \lambda\, \mathbf{e}'\boldsymbol{\Phi}\mathbf{e} > 0$ und

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu} &= \mu\, \mathbf{e} \\
\boldsymbol{\Sigma} &= \boldsymbol{\Phi} + \lambda\, \mathbf{E} \\
\boldsymbol{\varrho} &= \lambda\, \mathbf{e} \\
\mu_0 &= \mu
\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{e}$ die Summe der Einheitsvektoren und $\mathbf{E} = \mathbf{e}\mathbf{e}'$. Aus der Annahme an $\boldsymbol{\Sigma}$ folgt die Invertierbarkeit von $\boldsymbol{\Sigma}$ und

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} - \frac{\lambda}{1 + \lambda\, \mathbf{e}'\boldsymbol{\Phi}^{-1}\mathbf{e}}\, \boldsymbol{\Phi}^{-1}\mathbf{E}\boldsymbol{\Phi}^{-1}$$

Prognose für eine Zufallsvariable (7)

Satz. Unter den Annahmen des Standard Credibility–Modells gilt

$$\delta^{\text{Cred}}(X_0) = \frac{1}{1+\lambda \sum_{j=1}^m \varphi_j^{-1}}\, \mu + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda\, \varphi_i^{-1}}{1+\lambda \sum_{j=1}^m \varphi_j^{-1}}\, X_i$$

In Fall $\varphi_1 = \cdots = \varphi_m = \varphi$ gilt

$$\delta^{\text{Cred}}(X_0) = \frac{\varphi}{\varphi + \lambda\, m}\, \mu + \frac{\lambda\, m}{\varphi + \lambda\, m}\, \overline{X}(m)$$

mit $\overline{X}(m) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$.

Die Annahmen des Standard Credibility–Modells können in vielen Fällen durch eine Skalierung der Zufallsvariablen erreicht werden.

Prognose für einen Zufallsvektor (1)

Gegeben seien Zufallsvektoren $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{X}_1$ mit Werten in $\mathbb{R}^{m_0}$ bzw. $\mathbb{R}^{m_1}$ derart, dass $\mathbf{X}_1$ beobachtbar ist und $\mathbf{X}_0$ nicht beobachtbar ist, sowie eine Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times m_0}$. Ein Zufallsvektor

$$\delta^{\mathrm{Cred}}(\mathbf{DX}_0)$$

mit Werten in $\mathbb{R}^n$ heißt Credibility–Prädiktor von $\mathbf{DX}_0$, wenn er den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$E\left[\Big(\delta(\mathbf{DX}_0) - \mathbf{DX}_0\Big)'\Big(\delta(\mathbf{DX}_0) - \mathbf{DX}_0\Big)\right]$$

über alle Prädiktoren $\delta(\mathbf{DX}_0) \in \Delta^{\mathrm{Cred}}$ mit

$$\Delta^{\mathrm{Cred}} := \left\{\mathbf{q} + \mathbf{QX}_1 \;\middle|\; \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times m_1}\right\}$$

minimiert.

Prognose für einen Zufallsvektor (2)

Satz. Es existiert ein eindeutig bestimmter Credibility–Prädiktor $\delta^{\text{Cred}}(\mathbf{DX}_0)$ von $\mathbf{DX}_0$.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_0 \\ \boldsymbol{\mu}_1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{var}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{00} & \boldsymbol{\Sigma}_{01} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{10} & \boldsymbol{\Sigma}_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz. Ist $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ invertierbar, so gilt

$$\delta^{\text{Cred}}(\mathbf{DX}_0) = \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\Sigma}_{01}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\left(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1\right)\right)$$

Insbesondere gilt

$$\delta^{\text{Cred}}(\mathbf{DX}_0) = \mathbf{D}\,\delta^{\text{Cred}}(\mathbf{X}_0)$$

Reduktion des Prognose–Problems

Gegeben seien Zufallsvektoren $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ derart, dass $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ beobachtbar sind und $\mathbf{X}_0$ nicht beobachtbar ist.
Dann besitzt der Credibility–Prädiktor von $\mathbf{X}_0$ die Form

$$\delta^{\text{Cred}}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{q}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{Q}_2\mathbf{X}_2$$

Satz. Im Fall

$$\text{cov}(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1) = \mathbf{O} = \text{cov}(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_0)$$

gibt es $\mathbf{q}_1$ und $\mathbf{Q}_1$ mit

$$\delta^{\text{Cred}}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{q}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{X}_1$$

Ist $\mathbf{\Sigma}_{11}$ invertierbar, so gilt

$$\delta^{\text{Cred}}(\mathbf{X}_0) = \boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{\Sigma}_{01}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\left(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1\right)$$

Übersicht

- Das Prognose–Problem
- Bayes–Prognosen
- Credibility–Prognosen
- Prognosen in der Schadenreservierung
- Prognosen im Modell von Witting

Abwicklungsdreieck für Zuwächse

Anfall–	**Abwicklungsjahr**								
jahr	0	1	$\dots$	k	$\dots$	$n-i$	$\dots$	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	$\dots$	$Z_{0,k}$	$\dots$	$Z_{0,n-i}$	$\dots$	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	$\dots$	$Z_{1,k}$	$\dots$	$Z_{1,n-i}$	$\dots$	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	$\dots$	$Z_{i,k}$	$\dots$	$Z_{i,n-i}$	$\dots$	$Z_{i,n-1}$	$Z_{i,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	$\dots$	$Z_{n-k,k}$	$\dots$	$Z_{n-k,n-i}$	$\dots$	$Z_{n-k,n-1}$	$Z_{n-k,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$	$\dots$	$Z_{n-1,k}$	$\dots$	$Z_{n-1,n-i}$	$\dots$	$Z_{n-1,n-1}$	$Z_{n-1,n}$
n	$Z_{n,0}$	$Z_{n,1}$	$\dots$	$Z_{n,k}$	$\dots$	$Z_{n,n-i}$	$\dots$	$Z_{n,n-1}$	$Z_{n,n}$

Ein Zuwachs $Z_{i,k}$ heißt

- beobachtbar falls $i + k \leq n$.
- nicht beobachtbar oder zukünftig falls $i + k \geq n + 1$.

Prognose

Die Gesamtheit aller Zuwächse lässt sich durch einen Zufallsvektor

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{Z}_1 \end{pmatrix}$$

darstellen, sodass

- $\mathbf{Z}_1$ beobachtbar und
- $\mathbf{Z}_0$ nicht beobachtbar ist.

Aufgabe der Schadenreservierung ist die Prognose

- aller zukünftigen Zuwächse $Z_{i,k}$
- aller Anfalljahrreserven $\sum_{l=n-i+1}^{n} Z_{i,l}$
- aller Kalenderjahrreserven $\sum_{j=p-n}^{n} Z_{j,p-j}$
- der Gesamtreserve $\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=n-j+1}^{n} Z_{j,l}$

mit $i+k \geq n+1$ und $p = n+1, \dots, 2n$ auf der Basis von $\mathbf{Z}_1$.

Reduktion des Prognose–Problems (1)

Im Fall der Bayes–Prognose und
im Fall der Credibility–Prognose genügt es wegen

$$\delta^{\text{Bayes}}(\mathbf{D}\mathbf{Z}_0) = \mathbf{D}\,\delta^{\text{Bayes}}(\mathbf{Z}_0)$$

und

$$\delta^{\text{Cred}}(\mathbf{D}\mathbf{Z}_0) = \mathbf{D}\,\delta^{\text{Cred}}(\mathbf{Z}_0)$$

die entsprechenden Prädiktoren für einzelne
nicht–beobachtbare Zuwächse $Z_{i,k}$ mit $i+k \geq n+1$
zu bestimmen.

Reduktion des Prognose–Problems (2)

Ferner gilt:

- Bei unabhängigen Anfalljahren genügt es im Fall der Bayes–Prognose,
  den Bayes–Prädiktor von $Z_{i,k}$ mit $i+k \geq n+1$
  auf der Basis von $Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n-i}$ zu bestimmen.
- Bei unkorrelierten Anfalljahren genügt es im Fall der Credibility–Prognose,
  den Credibility–Prädiktor von $Z_{i,k}$ mit $i+k \geq n+1$
  auf der Basis von $Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n-i}$ zu bestimmen.

Übersicht

- Das Prognose–Problem
- Bayes–Prognosen
- Credibility–Prognosen
- Prognosen in der Schadenreservierung
- Prognosen im Modell von Witting

Modell von Witting

Das Modell von Witting besteht aus den folgenden Annahmen:

- Die Zuwächse nehmen nur Werte in der Menge $\mathbb{N}_0$ an.
- Die Zuwächse verschiedener Anfalljahre sind unkorreliert.
- Für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und $S_{i,n} := \sum_{l=0}^{n} Z_{i,l}$ gilt $E[S_{i,n}] > 0$.
- Es gibt Parameter $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \in (0, 1)$ mit $\sum_{l=0}^{n} \vartheta_l = 1$ derart, dass für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$P_{Z_{i,0},Z_{i,1},\ldots,Z_{i,n}|S_{i,n}} = \mathbf{Mult}(S_{i,n}; \vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$$

gilt.

Folgerungen aus dem Modell von Witting:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z_{i,k}|S_{i,n}) &= S_{i,n}\,\vartheta_k \\ \mathrm{cov}(Z_{i,k},Z_{i,l}|S_{i,n}) &= S_{i,n}\,\vartheta_k\,\delta_{k,l} - S_{i,n}\,\vartheta_k\vartheta_l \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \alpha_i &:= \mathrm{E}[S_{i,n}] \\ \sigma_i^2 &:= \mathrm{var}[S_{i,n}] \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Z_{i,k}] &= \alpha_i\,\vartheta_k \\ \mathrm{cov}[Z_{i,k},Z_{i,l}] &= \alpha_i\,\vartheta_k\,\delta_{k,l} + (\sigma_i^2 - \alpha_i)\,\vartheta_k\vartheta_l \end{aligned}$$

und für $X_{i,k} = Z_{i,k}/\vartheta_k$ (Skalierung) folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_{i,k}] &= \alpha_i \\ \mathrm{cov}[X_{i,k},X_{i,l}] &= \alpha_i\,\vartheta_k^{-1}\,\delta_{k,l} + (\sigma_i^2 - \alpha_i) \end{aligned}$$

Für jedes Anfalljahr $i \in \{1, \ldots, n\}$
und jedes Abwicklungsjahr $s \in \{n - i + 1, \ldots, n\}$ erfüllen
die beobachtbaren Zufallsvariablen $X_{i,0}, X_{i,1}, \ldots, X_{i,n-i}$ und
die nicht–beobachtbare Zufallsvariable $X_{i,s}$
die Annahmen des Standard Credibility–Modells.

Wegen der Unkorreliertheit der Anfalljahre stimmt
der Credibility–Prädiktor von $X_{i,s}$
auf der Basis von $X_{i,0}, X_{i,1}, \ldots, X_{i,n-i}$ mit
dem Credibility–Prädiktor von $X_{i,s}$
auf der Basis von $\{X_{j,l}\}_{j+l \leq n}$ überein.

Mit $\tau_i := (\sigma_i^2 - \alpha_i)/\alpha_i$ erhält man

$$\delta^{\text{Cred}}(X_{i,s}) = \frac{1}{1+\tau_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l}\,\alpha_i + \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\tau_i\,\vartheta_k}{1+\tau_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l}\,X_{i,k}$$

Mit $\gamma_k := \sum_{l=0}^{k} \vartheta_l$ und $S_{i,k} := \sum_{l=0}^{k} Z_{i,l}$ ergibt sich daraus

$$\delta^{\text{Cred}}(Z_{i,s}) = \vartheta_s \left(\frac{1}{1+\tau_i\,\gamma_{n-i}}\,\alpha_i + \frac{\tau_i\,\gamma_{n-i}}{1+\tau_i\,\gamma_{n-i}}\,\frac{S_{i,n-i}}{\gamma_{n-i}} \right)$$

Durch Summation erhält man ferner den Credibility–Prädiktor

$$\delta^{\text{Cred}}(S_{i,k}) = S_{i,n-i} + \left(\gamma_k - \gamma_{n-i}\right) \left(\frac{1}{1+\tau_i\,\gamma_{n-i}}\,\alpha_i + \frac{\tau_i\,\gamma_{n-i}}{1+\tau_i\,\gamma_{n-i}}\,\frac{S_{i,n-i}}{\gamma_{n-i}} \right)$$

für den Schadenstand $S_{i,k}$.