

Multivariate Modelle und Methoden in der Schadenreservierung

Klaus D. Schmidt

Lehrstuhl für Versicherungsmathematik
Technische Universität Dresden

Technische Universität Wien
18. Mai 2006

Übersicht

- Prognosen im Linearen Modell
- Das univariate additive Verfahren
- Das multivariate additive Verfahren
- Prognosen im Bedingten Linearen Modell
- Das univariate Chain–Ladder Verfahren
- Das multivariate Chain–Ladder Verfahren

Übersicht

- Prognosen im Linearen Modell
- Das univariate additive Verfahren
- Das multivariate additive Verfahren
- Prognosen im Bedingten Linearen Modell
- Das univariate Chain–Ladder Verfahren
- Das multivariate Chain–Ladder Verfahren

Lineares Modell

Gegeben seien Zufallsvektoren \mathbf{X}_0 und \mathbf{X}_1 derart, dass \mathbf{X}_1 beobachtbar ist und \mathbf{X}_0 nicht beobachtbar ist.

Wir nehmen an, dass es bekannte Matrizen \mathbf{A}_0 und \mathbf{A}_1 sowie einen unbekanntem Vektor β gibt mit

$$E \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_0 \end{pmatrix} \beta$$

Wir schreiben

$$\text{var} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{10} \\ \Sigma_{01} & \Sigma_{00} \end{pmatrix}$$

und nehmen an, dass die Matrix Σ_{11} invertierbar ist.

Schätzung (1)

Sei \mathbf{C} eine Matrix. Ein Zufallsvektor

$$\delta^{\text{GM}}(\mathbf{C}\beta)$$

heißt **Gauss–Markov Schätzer** von $\mathbf{C}\beta$, wenn er den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$E \left[\left(\delta(\mathbf{C}\beta) - \mathbf{C}\beta \right)' \left(\delta(\mathbf{C}\beta) - \mathbf{C}\beta \right) \right]$$

über alle erwartungstreuen linearen Schätzer $\delta(\mathbf{C}\beta)$ von $\mathbf{C}\beta$ minimiert.

Schätzung (2)

Satz. Es existiert ein eindeutig bestimmter Gauss–Markov Schätzer von $\mathbf{C}\beta$ und es gilt

$$\delta^{\text{GM}}(\mathbf{C}\beta) = \mathbf{C} \left(\mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1 \right)^{-1} \mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{X}_1$$

Insbesondere gilt

$$\delta^{\text{GM}}(\mathbf{C}\beta) = \mathbf{C} \delta^{\text{GM}}(\beta)$$

Wir setzen

$$\hat{\beta}^{\text{GM}} := \left(\mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1 \right)^{-1} \mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{X}_1$$

Prognose (1)

Sei \mathbf{D} eine Matrix. Ein Zufallsvektor

$$\delta^{\text{GM}}(\mathbf{DX}_0)$$

heißt **Gauss–Markov Prädiktor** von \mathbf{DX}_0 , wenn er den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$E \left[\left(\delta(\mathbf{DX}_0) - \mathbf{DX}_0 \right)' \left(\delta(\mathbf{DX}_0) - \mathbf{DX}_0 \right) \right]$$

über alle erwartungstreuen linearen Prädiktoren $\delta(\mathbf{DX}_0)$ von \mathbf{DX}_0 minimiert.

Prognose (2)

Satz. Es existiert ein eindeutig bestimmter Gauss–Markov Prädiktor von \mathbf{DX}_0 und es gilt

$$\delta^{\text{GM}}(\mathbf{DX}_0) = \mathbf{D} \left(\mathbf{A}_0 \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{GM}} + \boldsymbol{\Sigma}_{01} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_1 \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{GM}}) \right)$$

Insbesondere gilt

$$\delta^{\text{GM}}(\mathbf{DX}_0) = \mathbf{D} \delta^{\text{GM}}(\mathbf{X}_0)$$

Wir setzen

$$\hat{\mathbf{X}}_0^{\text{GM}} := \mathbf{A}_0 \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{GM}} + \boldsymbol{\Sigma}_{01} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_1 \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{GM}})$$

Reduktion des Prognose-Problems

Gegeben seien Zufallsvektoren \mathbf{X}_0 und $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ derart, dass $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ beobachtbar sind und \mathbf{X}_0 nicht beobachtbar ist.

Es gelte

$$E \begin{pmatrix} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_0 \end{pmatrix} \beta$$

Satz. Im Fall

$$\text{cov}(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1) = \mathbf{O} = \text{cov}(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_0)$$

gilt

$$\delta^{\text{GM}}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{A}_0 \hat{\beta}^{\text{GM}} + \boldsymbol{\Sigma}_{01} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_1 \hat{\beta}^{\text{GM}})$$

mit

$$\hat{\beta}^{\text{GM}} = \left(\mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1 \right)^{-1} \mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{X}_1$$

Übersicht

- Prognosen im Linearen Modell
- **Das univariate additive Verfahren**
- Das multivariate additive Verfahren
- Prognosen im Bedingten Linearen Modell
- Das univariate Chain–Ladder Verfahren
- Das multivariate Chain–Ladder Verfahren

Abwicklungsdreieck für Zuwächse

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	$n-i$...	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$...	$Z_{0,k}$...	$Z_{0,n-i}$...	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$...	$Z_{1,k}$...	$Z_{1,n-i}$...	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$...	$Z_{i,k}$...	$Z_{i,n-i}$...	$Z_{i,n-1}$	$Z_{i,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$...	$Z_{n-k,k}$...	$Z_{n-k,n-i}$...	$Z_{n-k,n-1}$	$Z_{n-k,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$...	$Z_{n-1,k}$...	$Z_{n-1,n-i}$...	$Z_{n-1,n-1}$	$Z_{n-1,n}$
n	$Z_{n,0}$	$Z_{n,1}$...	$Z_{n,k}$...	$Z_{n,n-i}$...	$Z_{n,n-1}$	$Z_{n,n}$

Ein Zuwachs $Z_{i,k}$ heißt

- ▶ **beobachtbar** falls $i + k \leq n$.
- ▶ **nicht beobachtbar** oder **zukünftig** falls $i + k \geq n + 1$.

Univariates Additives Modell (1)

Das univariate additive Modell besteht aus der folgenden Annahme:

Es gibt Parameter $v_0, v_1, \dots, v_n \in (0, \infty)$ und $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{R}$ sowie $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n \in (0, \infty)$ derart, dass für alle $i, j, k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$E[Z_{i,k}] = v_i \zeta_k$$

und

$$\text{cov}[Z_{i,k}, Z_{j,l}] = \begin{cases} v_i \sigma_k & \text{falls } i = j \text{ und } k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Univariates Additives Modell (2)

Das univariate additive Modell ist ein lineares Modell:

Im Fall $n = 2$ erhält man

$$E \begin{pmatrix} Z_{0,0} & Z_{0,1} & Z_{0,2} \\ Z_{1,0} & Z_{1,1} & Z_{1,2} \\ Z_{2,0} & Z_{2,1} & Z_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \zeta_0 & v_0 \zeta_1 & v_0 \zeta_2 \\ v_1 \zeta_0 & v_1 \zeta_1 & v_1 \zeta_2 \\ v_2 \zeta_0 & v_2 \zeta_1 & v_2 \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Univariates Additives Modell (3)

Linearisierung:

$$E \begin{pmatrix} Z_{0,0} \\ Z_{0,1} \\ Z_{0,2} \\ Z_{1,0} \\ Z_{1,1} \\ Z_{1,2} \\ Z_{2,0} \\ Z_{2,1} \\ Z_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 \\ v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 \\ v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Univariates Additives Modell (4)

Gruppierung:

$$E \begin{pmatrix} Z_{0,0} \\ Z_{0,1} \\ Z_{0,2} \\ Z_{1,0} \\ Z_{1,1} \\ Z_{2,0} \\ Z_{1,2} \\ Z_{2,1} \\ Z_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 \\ v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Univariates Additives Modell (5)

Beobachtbare Zuwächse:

$$E \begin{pmatrix} Z_{0,0} \\ Z_{0,1} \\ Z_{0,2} \\ Z_{1,0} \\ Z_{1,1} \\ Z_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 \\ v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Nichtbeobachtbare Zuwächse:

$$E \begin{pmatrix} Z_{1,2} \\ Z_{2,1} \\ Z_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Univariates Additives Modell (6)

Es gilt also

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 \\ v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{A}'_1 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 & v_1 & 0 & v_2 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Univariates Additives Modell (7)

Außerdem gilt

$$\Sigma_{11} = \text{var} \begin{pmatrix} Z_{0,0} \\ Z_{0,1} \\ Z_{0,2} \\ Z_{1,0} \\ Z_{1,1} \\ Z_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0\sigma_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0\sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_1\sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_1\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2\sigma_0 \end{pmatrix}$$

und

$$\Sigma_{01} = \text{cov} \left(\begin{pmatrix} Z_{1,2} \\ Z_{2,1} \\ Z_{2,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z_{0,0} \\ Z_{0,1} \\ Z_{0,2} \\ Z_{1,0} \\ Z_{1,1} \\ Z_{2,0} \end{pmatrix} \right) = \mathbf{0}$$

Univariates Additives Modell (8)

Für die Koordinaten des Gauss–Markov Schätzers von ζ erhält man daher

$$\widehat{\zeta}_k^{\text{GM}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j}$$

Dabei ist bemerkenswert, dass die Varianzparameter nicht auftreten.

Wegen $\Sigma_{01} = \mathbf{0}$ erhält man sodann für $i + k \geq n + 1$ mit

$$\widehat{z}_{i,k}^{\text{GM}} = v_i \widehat{\zeta}_k^{\text{GM}}$$

die Gauss–Markov Prädiktoren der nichtbeobachtbaren Zuwächse.

Die Gauss–Markov Prädiktoren für sämtliche Reserven erhält man nun durch Summation.

Übersicht

- Prognosen im Linearen Modell
- Das univariate additive Verfahren
- **Das multivariate additive Verfahren**
- Prognosen im Bedingten Linearen Modell
- Das univariate Chain–Ladder Verfahren
- Das multivariate Chain–Ladder Verfahren

Portfolios und Teilportfolios (1)

Wir betrachten ein Portfolio, das aus m Teilportfolios besteht.

Wir bezeichnen die **Zuwächse** der Teilportfolios mit

$$Z_{i,k}^{(p)}$$

wobei p die Nummer des Teilportfolios bezeichnet.

Portfolios und Teilportfolios (2)

Für jedes der Teilportfolios liegt ein Abwicklungsdreieck für Zuwächse vor:

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	$n-i$...	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}^{(p)}$	$Z_{0,1}^{(p)}$...	$Z_{0,k}^{(p)}$...	$Z_{0,n-i}^{(p)}$...	$Z_{0,n-1}^{(p)}$	$Z_{0,n}^{(p)}$
1	$Z_{1,0}^{(p)}$	$Z_{1,1}^{(p)}$...	$Z_{1,k}^{(p)}$...	$Z_{1,n-i}^{(p)}$...	$Z_{1,n-1}^{(p)}$	$Z_{1,n}^{(p)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$Z_{i,0}^{(p)}$	$Z_{i,1}^{(p)}$...	$Z_{i,k}^{(p)}$...	$Z_{i,n-i}^{(p)}$...	$Z_{i,n-1}^{(p)}$	$Z_{i,n}^{(p)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-k$	$Z_{n-k,0}^{(p)}$	$Z_{n-k,1}^{(p)}$...	$Z_{n-k,k}^{(p)}$...	$Z_{n-k,n-i}^{(p)}$...	$Z_{n-k,n-1}^{(p)}$	$Z_{n-k,n}^{(p)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	$Z_{n-1,0}^{(p)}$	$Z_{n-1,1}^{(p)}$...	$Z_{n-1,k}^{(p)}$...	$Z_{n-1,n-i}^{(p)}$...	$Z_{n-1,n-1}^{(p)}$	$Z_{n-1,n}^{(p)}$
n	$Z_{n,0}^{(p)}$	$Z_{n,1}^{(p)}$...	$Z_{n,k}^{(p)}$...	$Z_{n,n-i}^{(p)}$...	$Z_{n,n-1}^{(p)}$	$Z_{n,n}^{(p)}$

Portfolios und Teilportfolios (3)

Für ein festes Anfalljahr i und ein festes Abwicklungsjahr k setzen wir

$$\mathbf{z}_{i,k} := \begin{pmatrix} z_{i,k}^{(1)} \\ \vdots \\ z_{i,k}^{(m)} \end{pmatrix} = \left(z_{i,k}^{(p)} \right)_{p=1,\dots,m}$$

Wir bezeichnen diese Vektoren wieder als **Zuwächse**.

Portfolios und Teilportfolios (4)

Damit ergibt sich das folgende Abwicklungsdreieck für die (Vektoren der) Zuwächse:

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	$n-i$...	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$...	$Z_{0,k}$...	$Z_{0,n-i}$...	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$...	$Z_{1,k}$...	$Z_{1,n-i}$...	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$...	$Z_{i,k}$...	$Z_{i,n-i}$...	$Z_{i,n-1}$	$Z_{i,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$...	$Z_{n-k,k}$...	$Z_{n-k,n-i}$...	$Z_{n-k,n-1}$	$Z_{n-k,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$...	$Z_{n-1,k}$...	$Z_{n-1,n-i}$...	$Z_{n-1,n-1}$	$Z_{n-1,n}$
n	$Z_{n,0}$	$Z_{n,1}$...	$Z_{n,k}$...	$Z_{n,n-i}$...	$Z_{n,n-1}$	$Z_{n,n}$

Multivariates Additives Modell (1)

Das multivariate additive Modell besteht aus der folgenden Annahme:

Es gibt positiv definite Diagonalmatrizen $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ und Parametervektoren $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ sowie positiv definite symmetrische Matrizen $\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\Sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_n$ derart, dass für alle $i, j, k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$E[\mathbf{Z}_{i,k}] = \mathbf{V}_i \zeta_k$$

und

$$\text{cov}[\mathbf{Z}_{i,k}, \mathbf{Z}_{j,l}] = \begin{cases} \mathbf{V}_i^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{V}_i^{1/2} & \text{falls } i = j \text{ und } k = l \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Multivariates Additives Modell (2)

Unter der Annahme des multivariaten additiven Modells liegt für jedes Teilportfolio ein additives Modell (= lineares Modell von Mack) vor.

Im multivariaten additiven Modell sind je zwei verschiedene Zuwächse unkorreliert.

Im multivariaten additiven Modell ist, für jede Kombination von Anfalljahr und Abwicklungsjahr, Korrelation zwischen den Zuwächsen der Teilportfolios zugelassen.

Das multivariate additive Modell ist ein lineares Modell.

Multivariates Additives Modell (3)

Wir betrachten wieder den Fall $n = 2$:

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr		
	0	1	2
0	$\mathbf{Z}_{0,0}$	$\mathbf{Z}_{0,1}$	$\mathbf{Z}_{0,2}$
1	$\mathbf{Z}_{1,0}$	$\mathbf{Z}_{1,1}$	$\mathbf{Z}_{1,2}$
2	$\mathbf{Z}_{2,0}$	$\mathbf{Z}_{2,1}$	$\mathbf{Z}_{2,2}$

Wir formen die Annahme an die Erwartungswerte schrittweise um:

$$E \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} & \mathbf{Z}_{0,1} & \mathbf{Z}_{0,2} \\ \mathbf{Z}_{1,0} & \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} \\ \mathbf{Z}_{2,0} & \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 \zeta_0 & \mathbf{V}_0 \zeta_1 & \mathbf{V}_0 \zeta_2 \\ \mathbf{V}_1 \zeta_0 & \mathbf{V}_1 \zeta_1 & \mathbf{V}_1 \zeta_2 \\ \mathbf{V}_2 \zeta_0 & \mathbf{V}_2 \zeta_1 & \mathbf{V}_2 \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Multivariates Additives Modell (4)

Linearisierung:

$$E \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} \\ \mathbf{Z}_{0,1} \\ \mathbf{Z}_{0,2} \\ \mathbf{Z}_{1,0} \\ \mathbf{Z}_{1,1} \\ \mathbf{Z}_{1,2} \\ \mathbf{Z}_{2,0} \\ \mathbf{Z}_{2,1} \\ \mathbf{Z}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{V}_0 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{V}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{V}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Multivariates Additives Modell (5)

Gruppierung:

$$E \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} \\ \mathbf{Z}_{0,1} \\ \mathbf{Z}_{0,2} \\ \mathbf{Z}_{1,0} \\ \mathbf{Z}_{1,1} \\ \mathbf{Z}_{2,0} \\ \mathbf{Z}_{1,2} \\ \mathbf{Z}_{2,1} \\ \mathbf{Z}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{V}_0 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{V}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{O} & \mathbf{V}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Multivariates Additives Modell (6)

Beobachtbare Zuwächse:

$$E \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} \\ \mathbf{Z}_{0,1} \\ \mathbf{Z}_{0,2} \\ \mathbf{Z}_{1,0} \\ \mathbf{Z}_{1,1} \\ \mathbf{Z}_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{V}_0 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{V}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Nichtbeobachtbare Zuwächse:

$$E \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{1,2} \\ \mathbf{Z}_{2,1} \\ \mathbf{Z}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{O} & \mathbf{V}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Multivariates Additives Modell (7)

Die Matrix

$$\Sigma_{11} = \text{var} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} \\ \mathbf{Z}_{0,1} \\ \mathbf{Z}_{0,2} \\ \mathbf{Z}_{1,0} \\ \mathbf{Z}_{1,1} \\ \mathbf{Z}_{2,0} \end{pmatrix}$$

ist blockdiagonal. Außerdem gilt

$$\Sigma_{01} = \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{1,2} \\ \mathbf{Z}_{2,1} \\ \mathbf{Z}_{2,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} \\ \mathbf{Z}_{0,1} \\ \mathbf{Z}_{0,2} \\ \mathbf{Z}_{1,0} \\ \mathbf{Z}_{1,1} \\ \mathbf{Z}_{2,0} \end{pmatrix} \right) = \mathbf{0}$$

Multivariates Additives Modell (8)

Aufgrund der Blockstruktur der Matrizen \mathbf{A}_1 und $\mathbf{\Sigma}_{11}$ erhält man zunächst

$$\hat{\zeta}_k^{\text{GM}} = \left(\sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{v}_j^{1/2} \mathbf{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{v}_j^{1/2} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{n-k} \left(\mathbf{v}_j^{1/2} \mathbf{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{v}_j^{1/2} \right) \mathbf{v}_j^{-1} \mathbf{z}_{j,k}$$

und wegen $\mathbf{\Sigma}_{01} = \mathbf{0}$ ergibt sich daraus

$$\hat{\mathbf{z}}_{i,k}^{\text{GM}} = \mathbf{v}_i \hat{\zeta}_k^{\text{GM}}$$

Da die Gauss–Markov Eigenschaft unter linearen Transformationen erhalten bleibt, ergeben sich nun die Gauss–Markov Prädiktoren aller zukünftigen Schadenstände und aller Reserven durch Summation.

Übersicht

- Prognosen im Linearen Modell
- Das univariate additive Verfahren
- Das multivariate additive Verfahren
- **Prognosen im Bedingten Linearen Modell**
- Das univariate Chain–Ladder Verfahren
- Das multivariate Chain–Ladder Verfahren

Bedingtes Lineares Modell

Gegeben seien Zufallsvektoren \mathbf{X}_0 und \mathbf{X}_1 derart, dass \mathbf{X}_1 beobachtbar ist und \mathbf{X}_0 nicht beobachtbar ist.

Wir nehmen an, dass es bekannte Matrizen \mathbf{A}_0 und \mathbf{A}_1 sowie einen \mathcal{G} -messbaren Zufallsvektor β gibt mit

$$E^{\mathcal{G}} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_0 \end{pmatrix} \beta$$

Dabei ist \mathcal{G} eine Unter- σ -Algebra des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes.

Die Ergebnisse zur Schätzung und zur Prognose im Linearen Modell lassen sich unmittelbar auf das Bedingte Lineare Modell übertragen, wenn man alle Momente durch bedingte Momente ersetzt.

Übersicht

- Prognosen im Linearen Modell
- Das univariate additive Verfahren
- Das multivariate additive Verfahren
- Prognosen im Bedingten Linearen Modell
- **Das univariate Chain–Ladder Verfahren**
- Das multivariate Chain–Ladder Verfahren

Abwicklungsdreieck für Schadenstände

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	$n-i$...	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$...	$S_{0,k}$...	$S_{0,n-i}$...	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$...	$S_{1,k}$...	$S_{1,n-i}$...	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$...	$S_{i,k}$...	$S_{i,n-i}$...	$S_{i,n-1}$	$S_{i,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$...	$S_{n-k,k}$...	$S_{n-k,n-i}$...	$S_{n-k,n-1}$	$S_{n-k,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$...	$S_{n-1,k}$...	$S_{n-1,n-i}$...	$S_{n-1,n-1}$	$S_{n-1,n}$
n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$...	$S_{n,k}$...	$S_{n,n-i}$...	$S_{n,n-1}$	$S_{n,n}$

Ein Schadenstand $S_{i,k}$ heißt

- ▶ **beobachtbar** falls $i + k \leq n$.
- ▶ **nicht beobachtbar** oder **zukünftig** falls $i + k > n$.
- ▶ **aktueller Schadenstand** falls $i + k = n$.
- ▶ **Endschadenstand** falls $k = n$.

Univariates Chain–Ladder Modell (1)

Das univariate Chain–Ladder Modell ist ein **sequentielles Modell**, das aus einer Folge von bedingten linearen Modellen besteht.

Das univariate Chain–Ladder Modell verallgemeinert das Modell von **Mack**

Das univariate Chain–Ladder Modell besteht aus einer Folge von bedingten linearen Modellen bezüglich der σ –Algebren $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{n-1}$, wobei für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$ die σ –Algebra

$$\mathcal{G}_{k-1}$$

die Information repräsentiert, die in den Schadenständen $S_{j,l}$ der Anfalljahre $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ und der Abwicklungsjahre $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ enthalten ist.

Univariates Chain–Ladder Modell (2)

Das univariate Chain–Ladder Modell besteht in der folgenden Annahme:

Für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$ gibt es eine Zufallsvariable φ_k und eine strikt positive Zufallsvariable σ_k derart, dass für alle $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$E^{\mathcal{G}_{k-1}}(S_{i,k}) = S_{i,k-1} \varphi_k$$

und

$$\text{cov}^{\mathcal{G}_{k-1}}(S_{i,k}, S_{j,k}) = \begin{cases} S_{i,k-1} \sigma_k & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Univariates Chain–Ladder Modell (3)

Für jedes Abwicklungsjahr liegt ein bedingtes lineares Modell vor:

$$E^{\mathcal{G}} \begin{pmatrix} S_{0,k} \\ S_{1,k} \\ \vdots \\ S_{n-k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{0,k-1} \\ S_{1,k-1} \\ \vdots \\ S_{n-k,k-1} \end{pmatrix} \varphi_k$$

$$E^{\mathcal{G}} \begin{pmatrix} S_{n-k+1,k} \\ S_{n-k+2,k} \\ \vdots \\ S_{n,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{n-k+1,k-1} \\ S_{n-k+2,k-1} \\ \vdots \\ S_{n-k,k-1} \end{pmatrix} \varphi_k$$

Das univariate Chain–Ladder Modell ist dem univariaten additiven Modell sehr ähnlich. Dementsprechend erhält man ähnliche Ergebnisse, wobei aber der sequentielle Charakter des univariaten Chain–Ladder Modells zu berücksichtigen ist.

Univariates Chain–Ladder Modell (4)

Für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$ ist der bedingte Gauss–Markov Schätzer der Zufallsvariablen φ_k durch

$$\hat{\varphi}_k^{\text{GM}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

gegeben. Dies ist genau der **Chain–Ladder Faktor** für Abwicklungsjahr k .

Für jedes Anfalljahr $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ist der bedingte Gauss–Markov Prädiktor des ersten nichtbeobachtbaren Schadenstandes $S_{i,n-i+1}$ durch

$$\hat{S}_{i,n-i+1}^{\text{GM}} = S_{i,n-i} \hat{\varphi}_{n-i+1}^{\text{GM}}$$

gegeben. Dies ist genau der **Chain–Ladder Prädiktor** für $S_{i,n-i+1}$.

Univariates Chain–Ladder Modell (5)

Zur Klärung des Problems der optimalen Prognose für spätere Kalenderjahre ist eine Zusatzüberlegung erforderlich (vgl. multivariates Chain–Ladder Modell).

Übersicht

- Prognosen im Linearen Modell
- Das univariate additive Verfahren
- Das multivariate additive Verfahren
- Prognosen im Bedingten Linearen Modell
- Das univariate Chain–Ladder Verfahren
- **Das multivariate Chain–Ladder Verfahren**

Portfolios und Teilportfolios (1)

Wir betrachten ein Portfolio, das aus m Teilportfolios besteht.

Wir bezeichnen die **Schadenstände** der Teilportfolios mit

$$S_{i,k}^{(p)}$$

wobei p die Nummer des Teilportfolios bezeichnet.

Portfolios und Teilportfolios (2)

Für jedes der Teilportfolios liegt ein Abwicklungsdreieck für Schadenstände vor:

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	$n-i$...	$n-1$	n
0	$S_{0,0}^{(p)}$	$S_{0,1}^{(p)}$...	$S_{0,k}^{(p)}$...	$S_{0,n-i}^{(p)}$...	$S_{0,n-1}^{(p)}$	$S_{0,n}^{(p)}$
1	$S_{1,0}^{(p)}$	$S_{1,1}^{(p)}$...	$S_{1,k}^{(p)}$...	$S_{1,n-i}^{(p)}$...	$S_{1,n-1}^{(p)}$	$S_{1,n}^{(p)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$S_{i,0}^{(p)}$	$S_{i,1}^{(p)}$...	$S_{i,k}^{(p)}$...	$S_{i,n-i}^{(p)}$...	$S_{i,n-1}^{(p)}$	$S_{i,n}^{(p)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-k$	$S_{n-k,0}^{(p)}$	$S_{n-k,1}^{(p)}$...	$S_{n-k,k}^{(p)}$...	$S_{n-k,n-i}^{(p)}$...	$S_{n-k,n-1}^{(p)}$	$S_{n-k,n}^{(p)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	$S_{n-1,0}^{(p)}$	$S_{n-1,1}^{(p)}$...	$S_{n-1,k}^{(p)}$...	$S_{n-1,n-i}^{(p)}$...	$S_{n-1,n-1}^{(p)}$	$S_{n-1,n}^{(p)}$
n	$S_{n,0}^{(p)}$	$S_{n,1}^{(p)}$...	$S_{n,k}^{(p)}$...	$S_{n,n-i}^{(p)}$...	$S_{n,n-1}^{(p)}$	$S_{n,n}^{(p)}$

Portfolios und Teilportfolios (3)

Für ein festes Anfalljahr i und ein festes Abwicklungsjahr k setzen wir

$$\mathbf{s}_{i,k} := \begin{pmatrix} s_{i,k}^{(1)} \\ \vdots \\ s_{i,k}^{(m)} \end{pmatrix} = \left(s_{i,k}^{(p)} \right)_{p=1,\dots,m}$$

Wir bezeichnen diese Vektoren wieder als **Schadenstände**.

Portfolios und Teilportfolios (4)

Damit ergibt sich das folgende Abwicklungsdreieck für die (Vektoren der) Schadenstände:

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	$n-i$...	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$...	$S_{0,k}$...	$S_{0,n-i}$...	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$...	$S_{1,k}$...	$S_{1,n-i}$...	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$...	$S_{i,k}$...	$S_{i,n-i}$...	$S_{i,n-1}$	$S_{i,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$...	$S_{n-k,k}$...	$S_{n-k,n-i}$...	$S_{n-k,n-1}$	$S_{n-k,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$...	$S_{n-1,k}$...	$S_{n-1,n-i}$...	$S_{n-1,n-1}$	$S_{n-1,n}$
n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$...	$S_{n,k}$...	$S_{n,n-i}$...	$S_{n,n-1}$	$S_{n,n}$

Multivariates Chain–Ladder Modell (1)

Das multivariate Chain–Ladder Modell ist ein **sequentielles Modell**, das aus einer Folge von bedingten linearen Modellen besteht.

Das multivariate Chain–Ladder Modell verallgemeinert

- ▶ die **univariaten** Modelle von **Mack** und **Schnaus**,
- ▶ das **bivariate** Modell von **Braun** und
- ▶ die **multivariate** Verallgemeinerung des Modells von Braun durch **Kremer**.

Multivariates Chain–Ladder Modell (2)

Das multivariate Chain–Ladder Modell besteht aus einer Folge von bedingten linearen Modellen bezüglich der σ –Algebren $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{n-1}$, wobei für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$ die σ –Algebra

$$\mathcal{G}_{k-1}$$

die Information repräsentiert, die in den Schadenständen $\mathbf{S}_{j,l}$ der Anfalljahre $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ und der Abwicklungsjahre $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ enthalten ist.

Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{\Delta}_{i,k} := \text{diag}(\mathbf{S}_{i,k})$$

die Diagonal–Zufallsmatrix, deren Diagonal–Elemente die Koordinaten des Schadenstandes $\mathbf{S}_{i,k}$ sind.

Multivariates Chain–Ladder Modell (3)

Das multivariate Chain–Ladder Modell besteht in der folgenden Annahme:

Für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$ gibt es einen Zufallsvektor Φ_k und eine positiv definite symmetrische Zufallsmatrix Σ_k derart, dass für alle $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$E^{\mathcal{G}_{k-1}}(\mathbf{S}_{i,k}) = \Delta_{i,k-1} \Phi_k$$

und

$$\text{cov}^{\mathcal{G}_{k-1}}(\mathbf{S}_{i,k}, \mathbf{S}_{j,k}) = \begin{cases} \Delta_{i,k-1}^{1/2} \Sigma_k \Delta_{i,k-1}^{1/2} & \text{falls } i = j \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Multivariates Chain–Ladder Modell (4)

Für jedes Abwicklungsjahr liegt ein bedingtes lineares Modell vor:

$$E^{\mathcal{G}} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{0,k} \\ \mathbf{S}_{1,k} \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{n-k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{0,k-1} \\ \Delta_{1,k-1} \\ \vdots \\ \Delta_{n-k,k-1} \end{pmatrix} \Phi_k$$

$$E^{\mathcal{G}} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{n-k+1,k} \\ \mathbf{S}_{n-k+2,k} \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{n,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{n-k+1,k-1} \\ \Delta_{n-k+2,k-1} \\ \vdots \\ \Delta_{n-k,k-1} \end{pmatrix} \Phi_k$$

Das multivariate Chain–Ladder Modell ist dem multivariaten additiven Modell sehr ähnlich. Dementsprechend erhält man ähnliche Ergebnisse, wobei aber der sequentielle Charakter des multivariaten Chain–Ladder Modells zu berücksichtigen ist.

Multivariates Chain–Ladder Modell (5)

Für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$ ist der bedingte Gauss–Markov Schätzer des Zufallsvektors Φ_k durch

$$\hat{\Phi}_k^{\text{GM}} = \left(\sum_{j=0}^{n-k} \Delta_{j,k-1}^{1/2} \Sigma_k^{-1} \Delta_{j,k-1}^{1/2} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{n-k} \left(\Delta_{j,k-1}^{1/2} \Sigma_k^{-1} \Delta_{j,k-1}^{1/2} \right) \Delta_{j,k-1}^{-1} \mathbf{S}_{j,k}$$

gegeben.

Für jedes Anfalljahr $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ist der bedingte Gauss–Markov Prädiktor des ersten nichtbeobachtbaren Schadenstandes $\mathbf{S}_{i,n-i+1}$ durch

$$\hat{\mathbf{S}}_{i,n-i+1}^{\text{GM}} = \Delta_{i,n-i} \hat{\Phi}_{n-i+1}^{\text{GM}}$$

gegeben.

Multivariates Chain-Ladder Modell (6)

Auf der Grundlage der letzten Ergebnisse werden die **multivariaten Chain-Ladder Faktoren** durch

$$\hat{\Phi}_k^{\text{CL}} := \left(\sum_{j=0}^{n-k} \Delta_{j,k-1}^{1/2} \Sigma_k^{-1} \Delta_{j,k-1}^{1/2} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{n-k} \left(\Delta_{j,k-1}^{1/2} \Sigma_k^{-1} \Delta_{j,k-1}^{1/2} \right) \Delta_{j,k-1}^{-1} \mathbf{S}_{j,k}$$

und die **multivariaten Chain-Ladder Prädiktoren** durch

$$\hat{\mathbf{S}}_{i,k}^{\text{CL}} := \hat{\Delta}_{i,k-1}^{\text{CL}} \hat{\Phi}_k^{\text{CL}}$$

mit

$$\hat{\Delta}_{i,k-1}^{\text{CL}} := \begin{cases} \text{diag}(\mathbf{S}_{i,n-i}) & \text{falls } k = n - i + 1 \\ \text{diag}(\hat{\mathbf{S}}_{i,k-1}^{\text{CL}}) & \text{falls } k \geq n - i + 2 \end{cases}$$

definiert.

Multivariates Chain–Ladder Modell (7)

Das multivariate Chain–Ladder Verfahren kann für $k \geq n - i + 2$ durch das folgende **sequentielle Optimalitätskriterium** begründet werden:

Minimiere für jedes Abwicklungsjahr $k \geq n - i + 2$ den \mathcal{G}_{k-1} -bedingten erwarteten quadratischen Prognosefehler über alle Prädiktoren $\hat{\mathbf{S}}_{i,k}$ der Form

$$\hat{\mathbf{S}}_{i,k} = \hat{\Delta}_{i,k-1}^{\text{CL}} \hat{\Phi}_k$$

mit einem \mathcal{G}_{k-1} -bedingt erwartungstreuen linearen Schätzer $\hat{\Phi}_k$ von Φ_k .

Multivariates Chain–Ladder Modell (8)

Das sequentielle Optimalitätskriterium entspricht (auch im univariaten Fall) dem sequentiellen Charakter des Chain–Ladder Verfahrens.

Das sequentielle Optimalitätskriterium ist darüber hinaus sinnvoll, weil

- ▶ die Prognosen für das erste nichtbeobachtbare Kalenderjahr zu einem späteren Zeitpunkt nicht mehr korrigiert werden können, während
- ▶ die Prognosen für spätere Kalenderjahre nach Ablauf eines Jahres ohnehin korrigiert werden müssen, da dann neue Daten vorliegen.