Multiplikative Tarife und Marginalsummengleichungen

Klaus D. Schmidt

Lehrstuhl für Versicherungsmathematik
Technische Universität Dresden

Universität Saarbrücken
1. Juli 2008

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Multiplikativer Tarif (1)

Kraftfahrthaftpflicht–Bestand eines Versicherungsunternehmens:

Region	**Fahrleistung in km/Jahr** 0-20.000	20.000–40.000	40.000–∞
⋮			
DD	600	300	100
⋮			
SB	180	75	20
⋮			

Tarifmerkmale:

- Region
- Fahrleistung

Multiplikativer Tarif (2)

Prämien in Prozent der Grundprämie:

Region	**Fahrleistung in km/Jahr** 0-20.000	20.000–40.000	40.000–∞	Faktor
⋮				
DD	0,54	0,72	0,90	0,90
⋮				
SB	0,42	0,56	0,70	0,70
⋮				
Faktor	0,60	0,80	1,00	

Vorteile eines multiplikativen Tarifs:

- Weniger Tariffaktoren als Tarifzellen.
- Trennung von Prämienniveau (Grundprämie) und Struktur des Bestandes.

Multiplikativer Tarif (3)

Notation für zwei Tarifmerkmale $\mathcal{I}$ und $\mathcal{K}$:

- Tarifklassen $i \in \{1, \ldots, I\}$ für Tarifmerkmal $\mathcal{I}$
- Tarifklassen $k \in \{1, \ldots, K\}$ für Tarifmerkmal $\mathcal{K}$
- Tarifzellen $(i, k) \in \{1, \ldots, I\} \times \{1, \ldots, K\} =: Q$
- Volumen $v_{i,k} \in (0, \infty)$ in Tarifzelle $(i, k) \in Q$
- Schadenaufwand $S_{i,k}$ in Tarifzelle (i, k)
- Schadenbedarf pro Risiko in Tarifzelle (i, k):

$$\frac{S_{i,k}}{v_{i,k}}$$

- Nettoprämie pro Risiko in Tarifzelle (i, k):

$$\mathrm{E}\left[\frac{S_{i,k}}{v_{i,k}}\right]$$

Multiplikativer Tarif (4)

Ein multiplikativer Tarif liegt vor, wenn es Parameter $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_K \in (0, \infty)$ gibt mit

$$E\left[\frac{S_{i,k}}{v_{i,k}}\right] = \mu\, \alpha_i\, \beta_k$$

für alle $(i, k) \in Q$.

Mögliche Normierungen:

- $\max_{i=1}^{I} \alpha_i = 1 = \max_{k=1}^{K} \beta_k$
- $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 1 = \sum_{k=1}^{K} \beta_k$

Bezeichnungen:

- Grundprämie μ
- Tariffaktoren $\alpha_1, \dots, \alpha_I$ und $\beta_1, \dots, \beta_K$

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Kollektives Modell (1)

Sei

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(M, \mathcal{M})$ ein Messraum,
- N eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$, und
- $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen mit Werten in M.

Das Paar

$$\langle N, \{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \rangle$$

heißt kollektives Modell, wenn die Folge $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt (i.i.d.) und unabhängig von N ist.

Interpretation:

- N ist die Schadenzahl des Bestandes (in einem Geschäftsjahr)
- Y_j ist die Schadenvariable des j–ten Schadens des Bestandes und gibt die Tarifzelle des Risikos, das den Schaden verursacht, und die Schadenhöhe an.

Kollektives Modell (2)

Ziel: Zerlegung des kollektiven Modells $\langle N, \{Y_j\}_{j \in \mathbb{N}} \rangle$ nach einer messbaren Zerlegung

$$M_1, \dots, M_m$$

von M mit

$$\eta_p := \mathrm{P}[\{Y \in M_p\}]$$

und $\eta_p \in (0, 1)$ für alle $p \in \{1, \dots, m\}$,
wobei Y eine Zufallsgröße bezeichnet,
die dieselbe Verteilung besitzt wie jede der Zufallsgrößen Y_j.

Wir konstruieren zunächst die Verdünnung für festes $p \in \{1, \dots, m\}$ und betrachten sodann die Eigenschaften der Verdünnung und der Zerlegung als Ganzes.

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Verdünnung (1)

Verdünnung für festes $p \in \{1, \ldots, m\}$:

- Sei
$$N_p := \sum_{j=1}^{N} \chi_{\{Y_j \in M_p\}}$$
die Anzahl der Schäden mit einem Wert in M_p.
- Sei $\nu_{p;0} := 0$ und für $j \in \mathbb{N}$ sei
$$\nu_{p;j} := \inf\Big\{ l \in \mathbb{N} \Bigm| \nu_{p;j-1} < l \text{ und } Y_l \in M_p \Big\}$$
die Nummer des j–ten Schadens mit einem Wert in M_p.
- Für $j \in \mathbb{N}$ sei
$$Y_{p;j} := \sum_{l=1}^{\infty} \chi_{\{\nu_{p;j} = l\}} Y_l$$
die Schadenvariable des j–ten Schadens mit einem Wert in M_p.

Verdünnung (2)

Satz. Für jedes $p \in \{1, \ldots, m\}$ ist das Paar

$$\langle N_p, \{Y_{p;j}\}_{j \in \mathbb{N}} \rangle$$

ein kollektives Modell.

Die Unabhängigkeit von N_p und $\{Y_{p;j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ ist bemerkenswert, da jede dieser Zufallsgrößen unter Verwendung der Folge $\{Y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ konstruiert wurde.

Allgemeine Anwendung in der Statistik:
(Nachträgliche) Zerlegung einer Stichprobe nach den Ausprägungen eines der betrachteten Merkmale.

Es bleiben die Abhängigkeiten zwischen den verdünnten kollektiven Modellen zu untersuchen.

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Zerlegung (1)

Satz. Die Familien

$$\{Y_{1;j}\}_{j\in\mathbb{N}}, \dots, \{Y_{m;j}\}_{j\in\mathbb{N}}$$

sind unabhängig voneinander.

Mit $\langle N, \{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$ ist für alle $p \in \{1,\dots,m\}$ auch

$$\langle N, \{\chi_{\{X_j\in M_p\}}\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$$

ein kollektives Modell und für alle $p, q \in \{1,\dots,m\}$ mit $p \neq q$ gelten die Wald'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} E[N_p] &= \eta_p\, E[N] \\ \mathrm{var}[N_p] &= \eta_p\, E[N] + \eta_p^2\,(\mathrm{var}[N] - E[N]) \\ \mathrm{cov}[N_p, N_q] &= \eta_p\,\eta_q\,(\mathrm{var}[N] - E[N]) \end{aligned}$$

Zerlegung (2)

Satz. Es gilt

$$N = \sum_{p=1}^{m} N_p$$

und für jede Familie $\{n_p\}_{p\in\{1,\ldots,m\}} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{p=1}^m n_p = n$ gilt

$$P\left[\bigcap_{p=1}^{m} \{N_p = n_p\} \,\middle|\, \{N = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{p=1}^m n_p!} \prod_{p=1}^{m} \eta_p^{n_p}$$

Satz. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Die Familie $\{N_p\}_{p\in\{1,\ldots,m\}}$ ist unabhängig.
- N besitzt eine Poisson–Verteilung.

In diesem Fall besitzen auch alle Schadenzahlen N_p eine Poisson–Verteilung.

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Zerlegung nach Tarifzellen (1)

Wir betrachten das kollektive Modell $\langle N, \{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$ mit

$$M := (\{1,\ldots,I\} \times \{1,\ldots,K\}) \times \mathbb{R} = Q \times \mathbb{R}$$

und $\mathcal{M} := 2^{\{1,\ldots,I\}\times\{1,\ldots,K\}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = 2^Q \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann lassen sich die Schadenvariablen in der Form

$$Y_j = \begin{pmatrix} T_j \\ X_j \end{pmatrix}$$

darstellen, wobei

- T_j die Tarifzelle bezeichnet, der das Risiko, das den j–Schaden verursacht, angehört, und
- X_j die Schadenhöhe des j–ten Schadens bezeichnet.

Wir nehmen an, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariablen T_j und X_j voneinander unabhängig sind und $\mathrm{P}[\{X_j \geq 0\}] = 1$ gilt.

Zerlegung nach Tarifzellen (2)

Mit $\langle N, \{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$ ist auch

$$\langle N, \{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$$

ein kollektives Modell und für den Schadenaufwand des Bestandes

$$S := \sum_{j=1}^{N} X_j$$

gilt die Wald'sche Gleichung

$$\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[X]$$

wobei X eine Zufallsvariable bezeichnet,
die dieselbe Verteilung besitzt wie jede der Schadenhöhen X_j.

Zerlegung nach Tarifzellen (3)

Aus der Zerlegung des kollektiven Modells $\langle N, \{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$ nach den Mengen

$$M_{i,k} := \{(i,k)\} \times \mathbb{R}$$

mit

$$\eta_{i,k} := P[\{Y \in M_{i,k}\}] = P[\{T = (i,k)\}]$$

und $\eta_{i,k} \in (0,1)$ ergeben sich die kollektiven Modelle

$$\langle N_{i,k}, \{Y_{i,k;j}\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$$

für die Tarifzellen und es gilt

$$Y_{i,k;j} = \begin{pmatrix} (i,k) \\ X_{i,k;j} \end{pmatrix}$$

Schadenaufwand der Tarifzelle (i,k):

$$S_{i,k} := \sum_{j=1}^{N_{i,k}} X_{i,k;j}$$

Zerlegung nach Tarifzellen (4)

Satz. Für alle $(i, k) \in Q$ gilt

- $\mathrm{P}[\{X_{i,k} \in B\}] = \mathrm{P}[\{X \in B\}]$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- $\mathrm{E}[N_{i,k}] = \eta_{i,k}\,\mathrm{E}[N]$.
- $\mathrm{E}[S_{i,k}] = \mathrm{E}[N_{i,k}]\,\mathrm{E}[X_{i,k}] = \eta_{i,k}\,\mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[X] = \eta_{i,k}\,\mathrm{E}[S]$.

Satz.

- Es gilt $N = \sum_{(i,k)\in Q} N_{i,k}$.
- Für jede Familie $\{n_{i,k}\}_{(i,k)\in Q} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{(i,k)\in Q} n_{i,k} = n$ gilt

$$\mathrm{P}\left[\bigcap_{(i,k)\in Q} \{N_{i,k} = n_{i,k}\} \,\middle|\, \{N = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{(i,k)\in Q} n_{i,k}!} \prod_{(i,k)\in Q} \eta_{i,k}^{n_{i,k}}$$

- Es gilt $S = \sum_{(i,k)\in Q} S_{i,k}$.

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten (1)

Gegeben: Bekannte Volumenmaße

$$v_{i,k} \in \mathbb{R}_+$$

für alle Tarifzellen $(i, k) \in Q$.

Annahme: Es gibt Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_I \in (0, \infty)$ und $\beta_1, \ldots, \beta_K \in (0, \infty)$ mit

$$\eta_{i,k} = \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k}$$

für alle $(i, k) \in Q$. Dann gilt

$$\sum_{(i,k)\in Q} \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k} = 1$$

Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten (2)

Wegen $\eta_{i,k} = \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k}$ gilt

- für die erwartete Schadenzahl in Tarifzelle (i, k)

$$E[N_{i,k}] = \eta_{i,k} \, E[N] = \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k} \, E[N]$$

- für den erwarteten Schadenaufwand in Tarifzelle (i, k)

$$E[S_{i,k}] = \eta_{i,k} \, E[S] = \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k} \, E[S]$$

- für die Nettoprämie pro Risiko in Tarifzelle (i, k)

$$E[S_{i,k}/v_{i,k}] = \alpha_i \, \beta_k \, E[S]$$

Insbesondere ergibt sich ein multiplikativer Tarif.

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Marginalsummenschätzung: Schadenaufwände (1)

Schätzung auf der Grundlage von Schadenaufwänden:

Für die Schadenaufwände der Tarifzellen und des gesamten Bestandes gilt

$$\sum_{(i,k)\in Q} S_{i,k} = S$$

sowie

$$\mathrm{E}[S_{i,k}] = \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k} \, \mathrm{E}[S]$$

Marginalsummenschätzung: Schadenaufwände (2)

Aus der Gleichung $\mathrm{E}[S_{i,k}] = \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k} \, \mathrm{E}[S]$ erhält man durch Summation

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K} \mathrm{E}[S_{i,k}] &= \sum_{k=1}^{K} \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k} \, \mathrm{E}[S] \qquad i \in \{1, \dots, I\} \\ \sum_{i=1}^{I} \mathrm{E}[S_{i,k}] &= \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k} \, \mathrm{E}[S] \qquad k \in \{1, \dots, K\} \end{aligned}$$

Schätzer $\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_I$ und $\widehat{\beta}_1, \dots, \widehat{\beta}_K$ der Parameter $\alpha_1, \dots, \alpha_I$ und $\beta_1, \dots, \beta_K$ heißen Marginalsummenschätzer, wenn sie die Marginalsummengleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K} \widehat{\alpha}_i \, \widehat{\beta}_k \, v_{i,k} &= \sum_{k=1}^{K} \frac{S_{i,k}}{S} \qquad i \in \{1, \dots, I\} \\ \sum_{i=1}^{I} \widehat{\alpha}_i \, \widehat{\beta}_k \, v_{i,k} &= \sum_{i=1}^{I} \frac{S_{i,k}}{S} \qquad k \in \{1, \dots, K\} \end{aligned}$$

erfüllen.

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Marginalsummenschätzung: Schadenzahlen (1)

Für die Schadenzahlen der Tarifzellen und des gesamten Bestandes gilt

$$\sum_{(i,k)\in Q} N_{i,k} = N$$

sowie

$$\mathrm{E}[N_{i,k}] = \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k} \, \mathrm{E}[N]$$

Beachte: Es gilt

$$\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[N] \, \mathrm{E}[X]$$

und wegen $\mathrm{E}[X_{i,k}] = \mathrm{E}[X]$ gilt

$$\mathrm{E}[S_{i,k}] = \mathrm{E}[N_{i,k}] \, \mathrm{E}[X]$$

Marginalsummenschätzung: Schadenzahlen (2)

Aus der Gleichung $\mathrm{E}[N_{i,k}] = \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k} \, \mathrm{E}[N]$ erhält man durch Summation

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K} \mathrm{E}[N_{i,k}] &= \sum_{k=1}^{K} \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k} \, \mathrm{E}[N] \qquad && i \in \{1, \ldots, I\} \\ \sum_{i=1}^{I} \mathrm{E}[N_{i,k}] &= \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \, \beta_k \, v_{i,k} \, \mathrm{E}[N] \qquad && k \in \{1, \ldots, K\} \end{aligned}$$

und damit die Marginalsummengleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K} \widehat{\alpha}_i \, \widehat{\beta}_k \, v_{i,k} &= \sum_{k=1}^{K} \frac{N_{i,k}}{N} \qquad && i \in \{1, \ldots, I\} \\ \sum_{i=1}^{I} \widehat{\alpha}_i \, \widehat{\beta}_k \, v_{i,k} &= \sum_{i=1}^{I} \frac{N_{i,k}}{N} \qquad && k \in \{1, \ldots, K\} \end{aligned}$$

(jetzt mit $N_{i,k}/N$ anstelle von $S_{i,k}/S$).

Marginalsummenschätzung: Schadenzahlen (3)

Die Marginalsummenschätzung auf der Basis der Schadenzahlen lässt sich in Fall $v_{i,k} \in (0, \infty)$ für alle $(i, k) \in Q$ durch das Maximum–Likelihood–Prinzip begründen:

Sei $\mathrm{p} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch

$$\mathrm{p}(n) := \mathrm{P}[\{N = n\}]$$

Dann gilt für jede Familie $\{n_{i,k}\}_{(i,k)\in Q} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $n := \sum_{(i,k)\in Q} n_{i,k}$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left[\bigcap_{(i,k)\in Q} \{N_{i,k} = n_{i,k}\}\right] &= \frac{n!}{\prod_{(i,k)\in Q} n_{i,k}!} \prod_{(i,k)\in Q} \eta_{i,k}^{n_{i,k}} \cdot \mathrm{p}(n) \\ &= \frac{n!}{\prod_{(i,k)\in Q} n_{i,k}!} \prod_{(i,k)\in Q} (\alpha_i \beta_k v_{i,k})^{n_{i,k}} \cdot \mathrm{p}(n) \end{aligned}$$

Marginalsummenschätzung: Schadenzahlen (4)

Likelihood–Funktion:

$$L\Big(\widehat{\alpha}_1,\dots,\widehat{\alpha}_I,\widehat{\beta}_1,\dots,\widehat{\beta}_K \,\Big|\, \{N_{i,k}\}_{(i,k)\in Q}\Big)$$
$$= \frac{N!}{\prod_{(i,k)\in Q} N_{i,k}!} \prod_{(i,k)\in Q} (\widehat{\alpha}_i\widehat{\beta}_k v_{i,k})^{N_{i,k}} \cdot \mathrm{p}(N)$$

Log–Likelihood–Funktion:

$$(\log\circ L)\Big(\widehat{\alpha}_1,\dots,\widehat{\alpha}_I,\widehat{\beta}_1,\dots,\widehat{\beta}_K \,\Big|\, \{N_{i,k}\}_{(i,k)\in Q}\Big)$$
$$= \sum_{(i,k)\in Q} N_{i,k}\log(\widehat{\alpha}_i\widehat{\beta}_k v_{i,k}) + C$$

Marginalsummenschätzung: Schadenzahlen (5)

Lagrange–Ansatz: Minimiere

$$\ell\Big(\widehat{\alpha}_1,\dots,\widehat{\alpha}_I,\widehat{\beta}_1,\dots,\widehat{\beta}_K,\lambda \;\Big|\; \{N_{i,k}\}_{(i,k)\in Q}\Big)$$

$$= \sum_{(i,k)\in Q} N_{i,k}\log(\widehat{\alpha}_i\widehat{\beta}_k v_{i,k}) + \lambda\left(1 - \sum_{(i,k)\in Q}\widehat{\alpha}_i\widehat{\beta}_k v_{i,k}\right)$$

Partielle Differentiation ergibt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^K \frac{N_{i,k}}{\widehat{\alpha}_i} &= \lambda\sum_{k=1}^K \widehat{\beta}_k v_{i,k} \qquad i\in\{1,\dots,I\}\\
\sum_{i=1}^I \frac{N_{i,k}}{\widehat{\beta}_k} &= \lambda\sum_{i=1}^I \widehat{\alpha}_i v_{i,k} \qquad k\in\{1,\dots,K\}\\
1 &= \sum_{(i,k)\in Q}\widehat{\alpha}_i\widehat{\beta}_k v_{i,k}
\end{aligned}$$

Marginalsummenschätzung: Schadenzahlen (6)

und damit

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K} N_{i,k} &= \lambda \sum_{k=1}^{K} \widehat{\alpha}_i \widehat{\beta}_k v_{i,k} & i \in \{1, \dots, I\} \\ \sum_{i=1}^{I} N_{i,k} &= \lambda \sum_{i=1}^{I} \widehat{\alpha}_i \widehat{\beta}_k v_{i,k} & k \in \{1, \dots, K\} \\ 1 &= \sum_{(i,k)\in Q} \widehat{\alpha}_i \widehat{\beta}_k v_{i,k} \end{aligned}$$

Wegen

$$N = \sum_{(i,k)\in Q} N_{i,k} = \lambda \sum_{(i,k)\in Q} \widehat{\alpha}_i \widehat{\beta}_k v_{i,k} = \lambda$$

ergeben sich daraus die Marginalsummengleichungen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K} \widehat{\alpha}_i \, \widehat{\beta}_k \, v_{i,k} &= \sum_{k=1}^{K} \frac{N_{i,k}}{N} & i \in \{1, \dots, I\} \\ \sum_{i=1}^{I} \widehat{\alpha}_i \, \widehat{\beta}_k \, v_{i,k} &= \sum_{i=1}^{I} \frac{N_{i,k}}{N} & k \in \{1, \dots, K\} \end{aligned}$$

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Marginalsummenproblem (1)

Gegeben: Matrizen $\mathbf{V}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}_+^{\{1,\dots,I\}\times\{1,\dots,K\}}$ mit der Eigenschaft, dass jede Zeile und jede Spalte von $\mathbf{V}$ und $\mathbf{S}$ ein von 0 verschiedenes Element enthält.

Gesucht: Lösungen $(\mu, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in (0,\infty) \times (0,\infty)^I \times (0,\infty)^K$ der Marginalsummengleichungen (MS–Gleichungen)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \mu\, \alpha_i\, \beta_k\, v_{i,k} &= \sum_{k=1}^K s_{i,k} \qquad i \in \{1,\dots,I\} \\ \sum_{i=1}^I \mu \alpha_i\, \beta_k\, v_{i,k} &= \sum_{i=1}^I s_{i,k} \qquad k \in \{1,\dots,K\} \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist $(\mu, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ eine Lösung der MS–Gleichungen, so gilt

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K s_{i,k}}{\sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \alpha_i\, v_{i,k} \beta_k} = \frac{\mathbf{1}'\mathbf{S}\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{V}\boldsymbol{\beta}}$$

Marginalsummenproblem (2)

Die MS–Gleichungen besitzen eine radial eindeutige Lösung wenn

- sie eine Lösung $(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ besitzen und
- jede Lösung $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ die Gestalt $(c\boldsymbol{\alpha}^*, d\boldsymbol{\beta}^*)$ mit $c, d \in (0, \infty)$ besitzt.

Beispiel. Im Fall $v_{i,k} = v > 0$ für alle (i, k) besitzen die MS–Gleichungen die Gestalt

$$\begin{aligned} (\mu\, v\, \mathbf{1}'\boldsymbol{\beta})\, \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{S1} \\ (\mu\, v\, \mathbf{1}'\boldsymbol{\alpha})\, \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{S}'\mathbf{1} \end{aligned}$$

und damit die (radial eindeutige) Lösung $(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^* &= \mathbf{S1} \\ \boldsymbol{\beta}^* &= \mathbf{S}'\mathbf{1} \end{aligned}$$

und $\mu^* = (v\, \mathbf{1}'\mathbf{S1})^{-1}$.

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Äquivalente Fixpunktprobleme (1)

Seien $G : (0,\infty)^I \to (0,\infty)^K$ und $H : (0,\infty)^K \to (0,\infty)^I$ koordinatenweise definiert durch

$$G_k(\alpha) := \frac{\mathbf{1}'\mathbf{S}\mathbf{e}_k}{\alpha'\mathbf{V}\mathbf{e}_k} \qquad \text{und} \qquad H_i(\beta) := \frac{\mathbf{e}_i'\mathbf{S}\mathbf{1}}{\mathbf{e}_i'\mathbf{V}\beta}$$

Dann ist (α, β) genau dann eine Lösung der MS–Gleichungen, wenn es ein $\mu \in (0,\infty)$ gibt mit

$$\mu\,\boldsymbol{\alpha} = H(\boldsymbol{\beta}) \qquad \text{und} \qquad \mu\,\boldsymbol{\beta} = G(\boldsymbol{\alpha})$$

und in diesem Fall gilt

$$\mu = \frac{\mathbf{1}'\mathbf{S}\mathbf{1}}{\alpha'\mathbf{V}\beta}$$

Die Abbildungen G und H sind stetig, monoton fallend, und homogen vom Grad -1.

Äquivalente Fixpunktprobleme (2)

Seien $\Phi : (0,\infty)^I \to (0,\infty)^I$ und $\Psi : (0,\infty)^K \to (0,\infty)^K$ definiert durch

$$\Phi := H \circ G \qquad \text{und} \qquad \Psi := G \circ H$$

Die Abbildungen Φ und Ψ sind stetig, monoton wachsend, und homogen von Grad 1. Es gilt

$$G \circ \Phi = \Psi \circ G \qquad \text{und} \qquad \Phi \circ H = H \circ \Psi$$

Satz.

- Ist (α, β) eine Lösung der MS–Gleichungen, so ist α ein Fixpunkt von Φ und β ein Fixpunkt von Ψ.
- Ist α ein Fixpunkt von Φ, so ist $G(\alpha)$ ein Fixpunkt von Ψ und $(\alpha, G(\alpha))$ ist eine Lösung der MS–Gleichungen.
- Ist β ein Fixpunkt von Ψ, so ist $H(\beta)$ ein Fixpunkt von Φ und $(H(\beta), \beta)$ ist eine Lösung der MS–Gleichungen.

Äquivalente Fixpunktprobleme (3)

Beweis.

- Sei (α, β) eine Lösung der MS–Gleichungen und sei $\mu := \mathbf{1}'\mathbf{S}\mathbf{1}/\alpha'\mathbf{V}\beta$. Dann gilt

$$\mu\,\alpha = H(\beta) = H(\mu^{-1}G(\alpha)) = \mu\,H(G(\alpha)) = \mu\,\Phi(\alpha)$$

  Daher ist α ein Fixpunkt von Φ.

- Sei α ein Fixpunkt von Φ. Dann gilt

$$\Psi(G(\alpha)) = G(\Phi(\alpha)) = G(\alpha)$$

  Daher ist $G(\alpha)$ ein Fixpunkt von Ψ. Sei nun

$$\beta := G(\alpha)$$

  Dann gilt

$$\alpha = \Phi(\alpha) = H(G(\alpha)) = H(\beta)$$

  Daher ist (α, β) eine Lösung der MS–Gleichungen.

Äquivalente Fixpunktprobleme (4)

Satz. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Die MS–Gleichungen besitzen eine radial eindeutige Lösung.
- Φ besitzt einen radial eindeutigen Fixpunkt.
- Ψ besitzt einen radial eindeutigen Fixpunkt.

Existenzsatz. Für alle (i,k) gelte $v_{i,k} > 0$.
Dann besitzt Φ einen Fixpunkt.

Beweisskizze. Sei $\overline{G} : \mathbb{R}^I_+ \setminus \{\mathbf{0}\} \to (0,\infty)^K$ koordinatenweise definiert durch

$$\overline{G}_k(\alpha) := \frac{\mathbf{1}'\mathbf{S}\mathbf{e}_k}{\alpha'\mathbf{V}\mathbf{e}_k}$$

und sei

$$\overline{\Phi} := H \circ \overline{G}$$

Dann sind $\overline{G}$ und $\overline{\Phi}$ stetige Fortsetzungen von G und Φ.

Äquivalente Fixpunktprobleme (5)

- Sei
$$\Delta^I := \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^I \;\middle|\; \mathbf{1}'\boldsymbol{\alpha} = 1 \right\}$$
und sei $\widetilde{\Phi} : \Delta^I \to \Delta^I$ gegeben durch
$$\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) := \frac{1}{1 + \mathbf{1}'\overline{\Phi}(\boldsymbol{\alpha})} \left(\boldsymbol{\alpha} + \overline{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) \right)$$
Dann ist Δ^I nichtleer, konvex und kompakt und $\widetilde{\Phi}$ ist stetig. Nach dem Fixpunktsatz von Brouwer besitzt $\widetilde{\Phi}$ einen Fixpunkt $\boldsymbol{\alpha}$.
- $\boldsymbol{\alpha}$ ist Fixpunkt von $\overline{\Phi}$.
- Wegen $\boldsymbol{\alpha} = \overline{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) \in (0, \infty)^I$ ist $\boldsymbol{\alpha}$ ein Fixpunkt von Φ.

Gliederung

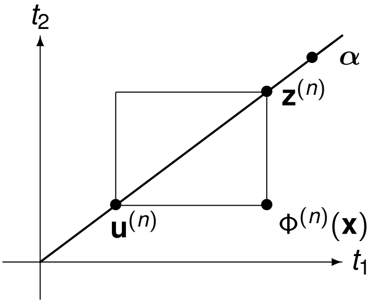
- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Radiale Eindeutigkeit und Iteration (1)

Satz. Für alle (i,k) gelte $v_{i,k} > 0$.
Ist $\boldsymbol{\alpha}$ ein Fixpunkt von Φ, so gibt es zu jedem $\mathbf{x} \in (0,\infty)^I$ ein $\xi \in (0,\infty)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\mathbf{x}) = \xi\,\boldsymbol{\alpha}$$

Beweisidee:



Radiale Eindeutigkeit und Iteration (2)

Folgerung. Für alle (i, k) gelte $v_{i,k} > 0$.
Dann besitzt Φ einen radial eindeutigen Fixpunkt.

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Beispiel (1)

Beispiel. Für

$$\mathbf{V} := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{S} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

gilt $v_{1,2} = 0$ (!) und es ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\mu\alpha_1\beta_1 \qquad\qquad & = 1 \\ 3\mu\alpha_2\beta_1 + \mu\alpha_2\beta_2 & = 4 \\ 2\mu\beta_1\alpha_1 + 3\mu\beta_1\alpha_2 & = 1 \\ \mu\beta_2\alpha_2 & = 4 \end{aligned}$$

Die Marginalsummengleichungen besitzen daher keine Lösung.

Beispiel (2)

Es gilt

$$\Phi(\boldsymbol{\alpha}) \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2/(2\alpha_1+3\alpha_2)} \\ \dfrac{4}{3/(2\alpha_1+3\alpha_2)+4/\alpha_2} \end{pmatrix}$$

und Iteration mit dem Anfangswert $\mathbf{x} := (1/2)\,\mathbf{1}$ ergibt die folgenden skalierten Iterierten $\mathbf{x}^{(n)} := \Phi^{(n)}(\mathbf{x})/\mathbf{1}'\Phi^{(n)}(\mathbf{x})$:

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$
0	0,5	0,5
1	0,742	0,258
10	0,952	0,048
100	0,995	0,005
1000	0,999	0,001
10000	1,000	0,000

Gliederung

- Multiplikativer Tarif
- Kollektives Modell
  - Annahmen
  - Verdünnung
  - Zerlegung
  - Zerlegung nach Tarifzellen
- Proportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten
  - Annahmen
  - Marginalsummenschätzung (Schadenaufwände)
  - Marginalsummenschätzung (Schadenzahlen)
- Lösbarkeit der Marginalsummengleichungen
  - Marginalsummenproblem
  - Äquivalente Fixpunktprobleme
  - Radiale Eindeutigkeit und Iteration
  - Beispiel
- Literatur

Literatur

- S. Dietze, T. Riedrich, K.D. Schmidt [2006]: On the solution of marginal–sum equations. DSVM 1/2006.
- T. Franke, K.T. Hess, W. Macht [1995]: Decomposition of risk processes. DSVM 2/1995.
- K.T. Hess [2000]: Random partitions of samples. DSVM 1/2000.
- K.T. Hess [2007]: Marginal–sum equations in motor liability insurance. DSVM 4/2007 (eingereicht).
- K.T. Hess, W. Macht, K.D. Schmidt [1995]: Thinnung of risk processes. DSVM 1/1995.
- K.T. Hess, K.D. Schmidt [2002]: A comparison of models for the chain–ladder method. Insurance Math. Econom. 31, 351-364.
- K.D. Schmidt [1996]: Lectures on Risk Theory. Stuttgart: Teubner.

DSVM = Dresdner Schriften zur Versicherungsmathematik.