Credibility: Top–Down versus Bottom–Up

Klaus D. Schmidt

Lehrstuhl für Versicherungsmathematik
Technische Universität Dresden

Workshop Vorau
25./26. September 2008

Gliederung

Gliederung

Prognose–Problem

Gegeben:
Eine Folge von quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ (Schadenzahlen, Schadenhöhen), wobei X_0 nicht beobachtbar ist und alle anderen X_k beobachtbar sind.

Prognose–Problem:
Existenz und Eindeutigkeit eines Prädiktors für X_0, der in der Klasse Δ_n aller zulässigen Prädiktoren (Prämien) der Form

$$\delta = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$

den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$E[(\delta - X_0)^2]$$

minimiert ($n \in \mathbb{N}$ zunächst fest; dann Asymptotik).

Gliederung

Klassisches Credibility–Modell (1)

Annahmen des klassischen Credibility–Modells (Bühlmann/Straub, 1967/1970):

- Es gibt einen zufälligen Risikoparameter Θ.
- Die Folge $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist bezüglich Θ bedingt i.i.d.

Erste Konsequenz aus den Modellannahmen:
Für alle $i, k \in \mathbb{N}_0$ mit $i \neq k$ gilt

$$\begin{aligned} \text{cov}[X_i, X_k] &= E[\text{cov}(X_i, X_k | \Theta)] + \text{cov}[E(X_i|\Theta), E(X_k|\Theta)] \\ &= \text{cov}[E(X|\Theta), E(X|\Theta)] \\ &= \text{var}[E(X|\Theta)] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Klassisches Credibility–Modell (2)

Benchmark und Hilfsmittel:

Die Individual–Prämie

$$\delta^{\mathrm{Ind}} := E(X|\Theta)$$

ist der eindeutig bestimmte Minimierer des erwarteten quadratischen Prognosefehlers

$$E[(\delta - X_0)^2]$$

über $\delta \in L^2(\sigma(\Theta))$. Es gilt $E[\delta^{\mathrm{Ind}}] = E[X_0]$ und

$$E[(\delta^{\mathrm{Ind}} - X_0)^2] = E[\mathrm{var}(X|\Theta)]$$

Klassisches Credibility–Modell (3)

Bayes'scher Ansatz:

Die Bayes–Prämie

$$\delta^{\text{Bayes(n)}} := E(X_0|X_1, \ldots, X_n)$$

ist der eindeutig bestimmte Minimierer des erwarteten quadratischen Prognosefehlers

$$E[(\delta - X_0)^2]$$

über $\delta \in L^2(\sigma(X_1, \ldots, X_n))$. Es gilt $E[\delta^{\text{Bayes(n)}}] = E[X_0]$ und

$$E[(\delta^{\text{Bayes(n)}} - X_0)^2] = E[\text{var}(X_0|X_1, \ldots, X_n)]$$

Klassisches Credibility–Modell (4)

Fundamental–Gleichung:

Für alle $k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1, \dots, n\}$ und $\delta \in L^2(\sigma(X_1, \dots, X_n))$ gilt

$$E[(\delta - X_k)^2] = E[(\delta - \delta^{\mathrm{Ind}})^2] + E[(\delta^{\mathrm{Ind}} - X_k)^2]$$

Unmittelbare Konsequenz ($k = 0$):

$$\delta^{\mathrm{Bayes(n)}} := E(X_0 | X_1, \dots, X_n) = E(\delta^{\mathrm{Ind}} | X_1, \dots, X_n)$$

Insbesondere konvergiert das Martingal $\{\delta^{\mathrm{Bayes(n)}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ fast sicher und im quadratischen Mittel gegen

$$E(X_0 | X_1, X_2 \dots) = E(\delta^{\mathrm{Ind}} | X_1, X_2, \dots)$$

Bestimmung des Grenzwertes später.

Klassisches Credibility–Modell (5)

Beispiele:

- Im Fall $P_\Theta = \textbf{Gamma}(\alpha, \beta)$ und $P_{X|\Theta} = \textbf{Poisson}(\Theta)$ gilt $\delta^{\mathrm{Ind}} = \Theta$ und $P_{\Theta|X_1,\dots,X_n} = \textbf{Gamma}(\alpha + n, \beta + \sum_{k=1}^n X_k)$ und damit

$$\delta^{\mathrm{Bayes(n)}} = \frac{\alpha}{\alpha + n} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{n}{\alpha + n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

- Im Fall $P_\Theta = \textbf{Pareto}(\alpha, \beta)$ mit $\beta > 2$ und $P_{X|\Theta} = \textbf{Uniform}(0, \Theta)$ gilt $\delta^{\mathrm{Ind}} = \Theta/2$ und $P_{\Theta|X_1,\dots,X_n} = \textbf{Pareto}(\max\{\alpha, X_1, \dots, X_n\}, \beta + n)$ und damit

$$\delta^{\mathrm{Bayes(n)}} = \frac{\beta + n}{2(\beta - 1 + n)} \max\{\alpha, X_1, \dots, X_n\}$$

Klassisches Credibility–Modell (6)

Credibility–Ansatz:

Parameter:

$$\begin{aligned} \mu &:= E[E(X|\Theta)] \\ \varphi &:= E[\mathrm{var}(X|\Theta)] \\ \lambda &:= \mathrm{var}[E(X|\Theta)] \\ \kappa &:= \varphi/\lambda \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu \\ \mathrm{var}[X] &= \varphi + \lambda \end{aligned}$$

Klassisches Credibility–Modell (7)

Die Credibility–Prämie

$$\delta^{\mathrm{Cred(n)}} := \frac{\kappa}{\kappa + n}\,\mu + \frac{n}{\kappa + n}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

ist der eindeutig bestimmte Minimierer des erwarteten quadratischen Prognosefehlers

$$E[(\delta - X_0)^2]$$

über $\delta \in \Delta_n := \mathrm{span}\{1, X_1, \ldots, X_n\}$. Es gilt $E[\delta^{\mathrm{Cred(n)}}] = E[X_0]$ und

$$E[(\delta^{\mathrm{Cred(n)}} - X_0)^2] = \varphi + \frac{\kappa}{\kappa + n}\,\lambda$$

Klassisches Credibility–Modell (8)

Aufgrund der Fundamental–Gleichung gilt

$$E[(\delta^{\text{Cred(n)}} - \delta^{\text{Ind}})^2] + E[(\delta^{\text{Ind}} - X_0)^2] \;=\; E[(\delta^{\text{Cred(n)}} - X_0)^2]$$

und aus

$$\begin{aligned} E[(\delta^{\text{Ind}} - X_0)^2] &= \varphi \\ E[(\delta^{\text{Cred(n)}} - X_0)^2] &= \varphi + \frac{\kappa}{\kappa + n}\,\lambda \end{aligned}$$

folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} \delta^{\text{Cred(n)}} = \delta^{\text{Ind}}$$

im quadratischen Mittel.
Nach dem Bedingten Gesetz der Großen Zahlen gilt außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \delta^{\text{Cred(n)}} = \delta^{\text{Ind}}$$

fast sicher.

Klassisches Credibility–Modell (9)

Aufgrund der Fundamental–Gleichung gilt

$$\begin{aligned}
\varphi &= E[(\delta^{\mathrm{Ind}} - X_0)^2] \\
&\leq E[(\delta^{\mathrm{Bayes(n)}} - \delta^{\mathrm{Ind}})^2] + E[(\delta^{\mathrm{Ind}} - X_0)^2] \\
&= E[(\delta^{\mathrm{Bayes(n)}} - X_0)^2] \\
&\leq E[(\delta^{\mathrm{Cred(n)}} - X_0)^2] \\
&= \varphi + \frac{\kappa}{\kappa + n}\,\lambda
\end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{n \to \infty} \delta^{\mathrm{Bayes(n)}} = \delta^{\mathrm{Ind}}$$

im quadratischen Mittel. Insbesondere gilt auch

$$\lim_{n \to \infty} \delta^{\mathrm{Bayes(n)}} = \delta^{\mathrm{Ind}}$$

fast sicher.

Gliederung

- Prognose–Problem
- Klassisches Credibility–Modell
- **Allgemeines Credibility–Modell**
- Standard Credibility–Modell
- Modell von Witting
- Literatur

Allgemeines Credibility–Modell (1)

Im allgemeinen Credibility–Modell werden keine Annahmen an die Verteilung der Folge $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ getroffen.

Hilbert–Raum–Ansatz:

- Der Raum L^2 der (Äquivalenzklassen der) quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen ist unter dem Skalarprodukt

  $$\langle X, Y\rangle := E[XY]$$

  ein Hilbert–Raum mit der Norm

  $$\|X\| := \langle X, X\rangle^{1/2} := (E[X^2])^{1/2}$$

- Die Menge

  $$\Delta_n := \mathrm{span}\{1, X_1, \ldots, X_n\}$$

  ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von L^2.

Allgemeines Credibility–Modell (2)

Projektionssatz im Hilbert–Raum:

Es gibt genau ein $\delta^{\mathrm{Cred(n)}} \in \Delta_n$ mit

$$E[(\delta^{\mathrm{Cred(n)}} - X_0)^2] = \inf_{\delta \in \Delta_n} E[(\delta - X_0)^2]$$

Achtung: Aus der Eindeutigkeit des Minimierers (also des Credibility–Prädiktors) $\delta^{\mathrm{Cred(n)}}$ folgt nicht, dass auch die Koeffizienten der Darstellung

$$\delta^{\mathrm{Cred(n)}} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$

eindeutig bestimmt sind.

Allgemeines Credibility–Modell (3)

Normalgleichungen: Für $\delta \in \Delta_n$ sind äquivalent:

- Es gilt $\delta = \delta^{\text{Cred(n)}}$.
- Für alle $Z \in \Delta_n$ gilt
$$E[\delta Z] = E[X_0 Z]$$
- Es gilt $E[\delta] = E[X_0]$ und für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt
$$E[\delta X_k] = E[X_0 X_k]$$
- Es gilt $E[\delta] = E[X_0]$ und für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt
$$\text{cov}[\delta, X_k] = \text{cov}[X_0, X_k]$$

Insbesondere ist der Credibility–Prädiktor $\delta^{\text{Cred(n)}}$ ein erwartungstreuer Prädiktor für X_0.

Allgemeines Credibility–Modell (4)

Darstellung der beobachtbaren Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ als Zufallsvektor:

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Sei

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &:= E[\mathbf{X}] \\ \boldsymbol{\Sigma} &:= \mathrm{var}[\mathbf{X}] \\ \mu_0 &:= E[X_0] \\ \boldsymbol{\varrho} &:= \mathrm{cov}[X_0, \mathbf{X}] \end{aligned}$$

Allgemeines Credibility–Modell (5)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- Es gilt $\delta^{\text{Cred(n)}} = a + \mathbf{a}'\mathbf{X}$.
- Es gilt

$$\begin{aligned} a + \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu} &= \mu_0 \\ \mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma} &= \varrho \end{aligned}$$

Ist $\boldsymbol{\Sigma}$ invertierbar, so gilt

$$\delta^{\text{Cred(n)}} = \mu_0 + \varrho\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$$

Gliederung

- Prognose–Problem
- Klassisches Credibility–Modell
- Allgemeines Credibility–Modell
- Standard Credibility–Modell
- Modell von Witting
- Literatur

Standard Credibility–Modell (1)

Annahme des Standard Credibility–Modells:

Es gibt Parameter $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ und $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in (0, \infty)$ mit

$$1 + \lambda \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{-1} > 0$$

und

$$\begin{aligned} E[X_k] &= \mu \\ \mathrm{cov}[X_i, X_k] &= \begin{cases} \lambda + \varphi_k & \text{falls } i = k \\ \lambda & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

für alle $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$

Standard Credibility–Modell (2)

Sei $\mathbf{1}$ die Summe der Einheitsvektoren und sei $\mathbf{E} := \mathbf{1}\mathbf{1}'$ und

$$\mathbf{\Phi} := \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

Dann gilt

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Phi} + \lambda \mathbf{E}$$

und $\mathbf{\Sigma}$ ist invertierbar mit

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \mathbf{\Phi}^{-1} - \frac{\lambda}{1 + \lambda\, \mathbf{1}'\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{1}}\, \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{\Phi}^{-1}$$

Für den Credibility–Prädiktor gilt daher

$$\delta^{\mathrm{Cred(n)}} = \frac{1}{1 + \lambda \sum_{l=1}^{n} \varphi_l^{-1}}\, \mu + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda\, \varphi_k^{-1}}{1 + \lambda \sum_{l=1}^{n} \varphi_l^{-1}}\, X_k$$

Standard Credibility–Modell (3)

Aus der Gleichung

$$\delta^{\text{Cred(n)}} = \frac{1}{1 + \lambda \sum_{l=1}^{n} \varphi_l^{-1}} \mu + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda \varphi_k^{-1}}{1 + \lambda \sum_{l=1}^{n} \varphi_l^{-1}} X_k$$

ergibt sich im Fall $\varphi_k = \varphi$ mit $\kappa := \varphi/\lambda$

$$\delta^{\text{Cred(n)}} = \frac{\kappa}{\kappa + n} \mu + \frac{n}{\kappa + n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

die aus dem klassischen Credibility–Modell bekannte Formel unter schwächeren Voraussetzungen.

Gliederung

Modell von Witting (1)

Abwicklungsdreieck/–quadrat für Zuwächse

Anfall–	**Abwicklungsjahr**							
jahr	0	1	...	k	...	$n-i$	...	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	...	$Z_{0,k}$	...	$Z_{0,n-i}$	...	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	...	$Z_{1,k}$	...	$Z_{1,n-i}$	...	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	...	$Z_{i,k}$	...	$Z_{i,n-i}$	...	$Z_{i,n-1}$	$Z_{i,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	...	$Z_{n-k,k}$	...	$Z_{n-k,n-i}$	...	$Z_{n-k,n-1}$	$Z_{n-k,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$	...	$Z_{n-1,k}$	...	$Z_{n-1,n-i}$	...	$Z_{n-1,n-1}$	$Z_{n-1,n}$
n	$Z_{n,0}$	$Z_{n,1}$	...	$Z_{n,k}$	...	$Z_{n,n-i}$	...	$Z_{n,n-1}$	$Z_{n,n}$

Ein Zuwachs $Z_{i,k}$ heißt

- beobachtbar falls $i + k \leq n$.
- nicht beobachtbar falls $i + k > n$.

Modell von Witting (2)

Annahmen:

- Die Zuwächse nehmen nur Werte in $\mathbb{N}_0$ an.
- Zuwächse verschiedener Anfalljahre sind unkorreliert.
- Es gibt ein Abwicklungsmuster $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in (0, 1)$ mit $\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$ derart, dass für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$P_{Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n} | S_{i,n}} = \mathbf{Multi}(S_{i,n}; \vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$$

  gilt.

Dabei bezeichnet

$$S_{i,n} := \sum_{k=0}^n Z_{i,k}$$

den Endschadenstand von Anfalljahr i (Risikoparameter).

Modell von Witting (3)

Ziel:

Bestimme den Credibility–Prädiktor für

- die Anfalljahr–Reserven

$$\sum_{k=n-i+1}^{n} Z_{i,k}$$

- die Gesamt–Reserve

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n-i+1}^{n} Z_{i,k}$$

auf der Basis aller (beobachtbaren) Zuwächse $Z_{i,k}$ mit $i + k \leq n$.

Modell von Witting (4)

Reduktion des Problems mit Hilfe der Normalgleichungen:

- Der Credibility–Prädiktor (als Abbildung) ist linear. Es genügt daher, die Credibility–Prädiktoren für die einzelnen (nicht beobachtbaren) Zuwächse $Z_{i,k}$ mit $i + k \geq n + 1$ zu bestimmen.
- Der Credibility–Prädiktor eines nicht beobachtbaren Zuwachses hängt nur von den beobachtbaren Zuwächsen desselben Anfalljahres ab.

Notation:

$$\begin{aligned} \alpha_i &:= E[S_{i,n}] \\ \sigma_i^2 &:= \mathrm{var}[S_{i,n}] \end{aligned}$$

Modell von Witting (5)

Aus den Annahmen ergibt sich

$$\begin{aligned} E(Z_{i,k}|S_{i,n}) &= S_{i,n}\,\vartheta_k \\ \mathrm{cov}(Z_{i,k},Z_{i,l}|S_{i,n}) &= S_{i,n}\,\vartheta_k\,\varepsilon_{k,l} - S_{i,n}\,\vartheta_k\vartheta_l \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} E[Z_{i,k}] &= \alpha_i\,\vartheta_k \\ \mathrm{cov}[Z_{i,k},Z_{i,l}] &= \alpha_i\,\vartheta_k\,\varepsilon_{k,l} + (\sigma_i^2-\alpha_i)\,\vartheta_k\vartheta_l \end{aligned}$$

Mit der Skalierung $X_{i,k} = Z_{i,k}/\vartheta_k$ folgt daraus

$$\begin{aligned} E[X_{i,k}] &= \alpha_i \\ \mathrm{cov}[X_{i,k},X_{i,l}] &= \alpha_i\,\vartheta_k^{-1}\,\varepsilon_{k,l} + (\sigma_i^2-\alpha_i) \end{aligned}$$

Modell von Witting (6)

Daher erfüllt für $s \in \{n-i+1, \ldots, n\}$ die Familie $\{X_{i,s}, X_{i,0}, X_{i,1}, \ldots, X_{i,n-i}\}$ der skalierten Zuwächse die Annahmen des Standard Credibility–Modells und mit $\tau_i := (\sigma_i^2 - \alpha_i)/\alpha_i$ erhält man

$$\delta^{\text{Cred}}(X_{i,s}) = \frac{1}{1+\tau_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l}\, \alpha_i + \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\tau_i\, \vartheta_k}{1+\tau_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l}\, X_{i,k}$$

Mit $\gamma_{n-i} := \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l$ und $S_{i,n-i} := \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l$ ergibt sich daraus

$$\delta^{\text{Cred}}(Z_{i,s}) = \vartheta_s \left(\frac{1}{1+\tau_i\, \gamma_{n-i}}\, \alpha_i + \frac{\tau_i\, \gamma_{n-i}}{1+\tau_i\, \gamma_{n-i}}\, \frac{S_{i,n-i}}{\gamma_{n-i}} \right)$$

Gliederung

- Prognose–Problem
- Klassisches Credibility–Modell
- Allgemeines Credibility–Modell
- Standard Credibility–Modell
- Modell von Witting
- Literatur

Literatur

- K.T. Hess, K.D. Schmidt [2001]:
  Credibility-Modelle in Tarifierung und Reservierung.
  Allg. Statist. Archiv 85, 225-246.
- M. Radtke, K.D. Schmidt [2004]:
  Handbuch zur Schadenreservierung.
  Karlsruhe, Verlag Versicherungswirtschaft.
- K.D. Schmidt [1998]:
  Unconditional Credibility.
  Dresdner Schriften zur Versicherungsmathematik 1/1998.
- T. Witting [1987]:
  Kredibilitätschätzungen für die Anzahl IBNR–Schäden.
  Blätter DGVM 18, 45–58