TU Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. Ch. Großmann/Dr. R. Vanselow

20. Februar 2006

Klausur Mathematik II für Fakultät MW und Studiengang Mechatronik

Aufgaben Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
Punkte max.	**9**	**9**	**9**	**10**	**13**	**50**
Punkte ist						

Die Lösungswege müssen deutlich erkennbar und in übersichtlicher Form notiert sein. Fehlende Zwischenschritte können nicht bewertet werden. Zu bestimmende Werte sind stets nur soweit zu ermitteln, wie das ohne Taschenrechner einfach möglich ist.

1. Es sei $Q \subset \mathbb{R}^3$ der durch

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1, \qquad \frac{x^2}{4\,c^2} + \frac{y^2}{9\,c^2} \ge 1, \qquad 0 \le z \le 2$$

beschriebene Körper. Dabei bezeichnet $c \in (0,1)$ einen fixierten Parameter. Unter Nutzung der Transformation $x = a\,u \cos v,\ y = b\,u \sin v$ mit geeigneten $a, b > 0$ berechne man das Trägheitsmoment J_z von Q bezüglich der z-Achse bei einer Dichte $\rho(x,y,z) = 1 + 2z$.

2. Es sei A das durch

$$x^2 + y^2 + z = 3, \qquad (x-1)^2 + y \le 4, \qquad y \ge 0$$

beschriebene Flächenstück im $\mathbb{R}^3$.

(a) Man skizziere die Projektion des Flächenstücks auf die x,y-Ebene.

(b) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1, 0, -x)^T$ mit $\mathbf{x} = (x,y,z)^T$ berechne man das Oberflächenintegral 2. Art

$$\int_A \mathbf{f}(\mathbf{x}) \circ d\mathbf{A}.$$

Dabei gelte $\mathbf{n} \circ \mathbf{e}_z > 0$ für die Normale von A.

3. (a) Durch die Transformation $\xi(x,y) = x+y, \quad \eta(x,y) = \alpha\, x + \beta\, y$ mit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, fest, wird definiert $u(x,y) = U(\xi(x,y), \eta(x,y))$. Man drücke die partielle Ableitung $u_{xy}(x,y)$ mit Hilfe partieller Ableitungen von $U(\xi,\eta)$ aus. Für welche Parameter $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ wird die Differentialgleichung

$$U_{\xi\xi}(\xi,\eta) \;-\; 9\, U_{\eta\eta}(\xi,\eta) \;=\; 1 \tag{1}$$

in die Form

$$u_{xy}(x,y) \;=\; f(x,y)$$

überführt?

(b) Man bestimme die allgemeine Lösung $U(\xi,\eta)$ von (1).

4. Es seien X, Y Zufallsgrößen, und es bezeichne

$$F_X(s) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } s \le -1, \\ \alpha & , \text{ für } -1 < s \le 1, \\ \beta & , \text{ für } s > 1 \end{cases} \qquad F_Y(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{(s-1)} & , \text{ für } s \le 1, \\ 1 - \frac{\gamma}{s^3} & , \text{ für } s > 1 \end{cases}$$

mit Parametern $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ die dazugehörigen Verteilungsfunktionen.

(a) Für welche Parameter $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ sind F_X, F_Y wirklich Verteilungsfunktionen?

(b) Für die Zufallsgröße Y mit $\gamma = 1/2$ bestimme man die Dichtefunktionen f_Y.

(c) Man bestimme die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$ für $\alpha = 1/4$, $\beta = 1$, $\gamma = 1/2$.

(d) Für die Zufallsgröße Y bestimme man für $\gamma = 1/4$ und $\gamma = 1/2$ jeweils die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(Y = 1 | Y \le 2)$.

5. Man bestimme die Lösung $u(x,t)$ des Anfangs-Randwert-Problems

$$\begin{aligned} (1+t)\, u_t(x,t) \;-\; u_{xx}(x,t) &= 0 && x \in (-\pi,\pi),\ t > 0, \\ u_x(-\pi,t) \;=\; u_x(\pi,t) &= 0 && t > 0, \\ u(x,0) &= 2 \;-\; \sin(x/2) \;+\; 3\,\cos(2x) && x \in [-\pi,\pi]. \end{aligned}$$

Hinweis: Die bei der Separation auftretende Differentialgleichung $-X''(x) \;=\; \lambda\, X(x)$ ist nur für $\lambda \ge 0$ zu untersuchen.