

15. Übung zur Vorlesung Mathematik 3 für Elektrotechniker etc.

Aufgabe 7.1.48

Ermitteln Sie das Bild des abgeschlossenen 1. Quadranten der z -Ebene bezüglich der Abbildungen

$$\text{a) } w = -\frac{2z}{z-1}, \quad \text{b) } w = \frac{i}{z+i}, \quad \text{c) } w = \frac{1}{z-i-1}.$$

Bilden Sie dazu einige Punkte der reellen und imaginären Achse ab, und nutzen Sie die Kreisverwandtschaft.

Aufgabe 7.1.52

Die Abbildung durch die Funktion $w = \frac{z-i}{z+i}$ ist zu untersuchen.

1. Man gebe die Bildpunkte von $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$ und $z_6 = \infty$ an.
2. In welche Kurven gehen die reelle Achse, die imaginäre Achse, der Einheitskreis der z -Ebene über?
3. Man ermittle die Fixpunkte der Abbildung, d.h. Punkte für die gilt: $z = w(z)$.

Zusatz:

4. Welches sind die Bildkurven von $Im(z) = \text{const.}$, $Re(z) = \text{const.}$ und $|z| = \text{const.}$?
5. Aus welcher Kurvenschar der z -Ebene sind die Bildkurven $|w| = c$ (c Scharparameter) entstanden?

Aufgabe 7.1.III.5

Eine Möbiustransformation bildet

1. Geraden durch $z = i$ auf Geraden durch $w = 1$,
2. aber $z = i$ **nicht** auf $w = 1$,
3. jedoch $z = 1$ auf $w = i$ ab.

Bestimmen Sie die Abbildung!

Aufgabe 7.1.III.6

Ein 'reelles Doppelverhältnis', s. VL. 15

$$\frac{\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}}{\frac{z_3 - z}{z_2 - z}} = \alpha \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

beschreibt alle Punkte z eines Kreises/einer Geraden durch z_1, z_2, z_3 .

Zeigen Sie, dass das reelle Doppelverhältnis vierer Punkte unter Inversion $w = \frac{1}{z}$ konstant bleibt:

$$\frac{\frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1}}{\frac{w_3 - w_4}{w_2 - w_4}} = \dots \text{ s. VL. 15}$$

Dies beweist, dass eine Gerade/ein Kreis auch bei Inversion in eine Gerade/einen Kreis übergeht.

Zusatz

Geben Sie für die unten abgebildete Schaltung (Aufgabe III-5.12 aus dem Aufgabenheft zur Vorlesung Dynamische Netzwerke) den Eingangsleitwert $\underline{Y}_{AB}(z)$ mit $z = i\omega$ an. Ist das eine gebrochene lineare Funktion (VL. 13, S. 6/7) in z (und damit zu erwarten, dass eine Gerade wie die imaginäre Achse auf eine Gerade/einen Kreis abgebildet wird)?

