Eigenwert, Eigenvektor

Ein **Eigenvektor** einer $n \times n$-Matrix A ist ein vom Nullvektor verschiedener Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ für den

$$Av = \lambda v$$

gilt für einen Skalar λ.

λ ist ein **Eigenwert** von A wenn die Gleichung

$$Ax = \lambda x$$

eine von Null verschiedene Lösung hat.

0 als Eigenwert

Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

Eigenraum

Die Eigenvektoren einer $n \times n$-Matrix zu einem festen Eigenwert λ bilden zusammen mit dem Nullvektor einen Untervektorraum des $\mathbb{K}^n$.

Man nennt ihn den **Eigenraum** zum Eigenwert λ. Seine Dimension heißt **(geometrische) Vielfachheit** des Eigenwertes λ.

Eigenvektoren l.u.

Sind $v_1, \ldots, v_r$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, dann ist die Menge $\{v_1, \ldots, v_r\}$ linear unabhängig.

Eine $n \times n$-Matrix kann also höchstens n Eigenwerte haben.

Wie findet man die Eigenwerte?

Die Gleichung

$$Ax = \lambda x$$

wird umgeformt zu

$$Ax = \lambda E x,$$

dabei ist E die Einheitsmatrix der passenden Größe. Daraus erhält man

$$\lambda E x - Ax = \mathbf{0},$$

was als äquivalente Bedingung

$$(\lambda E - A)x = \mathbf{0}$$

ergibt.

Kern $\lambda E - A$

Es gilt also:
Genau dann ist λ ein Eigenwert von A, wenn es einen von Null verschiedenen Vektor im Kern der Matrix $\lambda E - A$ gibt.

Besser gesagt:

Satz 1 *λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn*

$$\det(\lambda E - A) = 0.$$

Charkteristisches Polynom

Als das **charakteristische Polynom** eine $n \times n$-Matrix A bezeichnet man das Polynom

$$\det(\lambda E - A)$$

in der Variablen λ.

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.
Die Vielfachheit einer solchen Nullstelle bezeichnet man als die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwertes.

Bestimmung der Eigenraumes

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A, dann ist der zugehörige Eigenraum genau der Kern der Matrix $\lambda E - A$.

Die Bestimmung des Eigenraumes erfolgt also über die Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems.

Es ist damit klar, wie man alle Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix bestimmt.

Dreieckmatrix, Diagonalmatrix

Die Eigenwerte einer Matrix in Dreieckgestalt sind die Einträge auf der Hauptdiagonalen.

Kann A in der Form

$$A = PDP^{-1}$$

geschrieben werden für eine invertierbare Matrix P und eine Diagonalmatrix D, dann gilt:

- Die Diagonaleinträge von D sind genau die Eigenwerte von A.
- In den Spalten von P stehen zugehörige Eigenvektoren.

Man nennt A dann **diagonalisierbar**.

Potenzen einer diagonalisierbaren Matrix

Wenn A diagonalisierbar ist, wenn also

$$A = PDP^{-1}$$

gilt für eine invertierbare Matrix P und eine Diagonalmatrix D, dann können die Potenzen von A leicht berechnet werden:

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Charakterisierung

Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\mathbb{K}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt.

Das ist genau dann der Fall, wenn die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte gleich n ist.

Die geometrischen Vielfachheiten sind niemals größer als die algebraischen.