

# Vorlesung Diskrete Strukturen

## Diagramme von Begriffsverbänden

Bernhard Ganter

WS 2009/10

### Daten aus einer psychiatrischen Behandlung

Die folgenden Daten stammen aus einer Behandlung einer essgestörten Patientin.

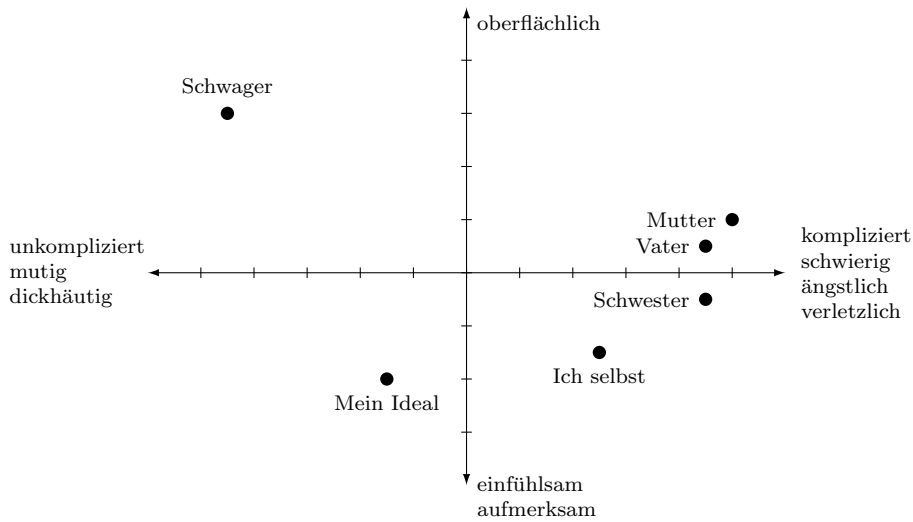
Es sind vereinfachte Originaldaten.

Eine mögliche Ursache der Essstörung ist die Art, wie die Patientin ihre enge soziale Umgebung wahrnimmt. Die Therapie versucht, diese Wahrnehmung bewusst zu machen und dadurch zu verändern.

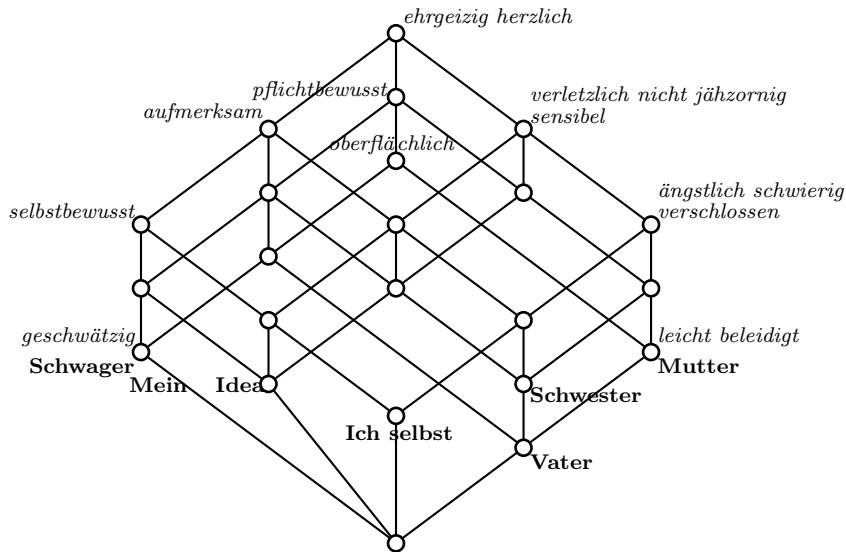
### Interviewdaten aus einer Therapie von Anorexia nervosa

	verletzlich	verschlossen	selbstsicher	plichtbewusst	herzlich	schwierig	aufmerksam	leicht beleidigt	nicht jähzornig	ängstlich	geschwätzig	oberflächlich	sensibel	ehrgeizig
Ich selbst	×	×	×		×	×	×		×	×			×	×
Mein Ideal	×		×	×	×		×		×				×	×
Vater	×	×		×	×	×	×	×	×	×		×	×	×
Mutter	×	×		×	×	×		×	×	×		×	×	×
Schwester	×	×		×	×	×	×		×	×			×	×
Schwager			×	×	×		×				×	×		×

### Ein Biplot von Interviewdaten



### Der Begriffsverband der Interviewdaten



### Daten in einen Begriffsverband entfalten

Zuerst werden die Daten in eine sehr einfache Form gebracht und als Kreuztabelle dargestellt (Fachwort: **formaler Kontext**).

Jeder solche formale Kontext wird in eine mathematische Struktur übersetzt, die **Begriffsverband** genannt wird. Die Information bleibt dabei erhalten.

Der Begriffsverband ist Grundlage weiterer Datenanalyse. Er kann gra-

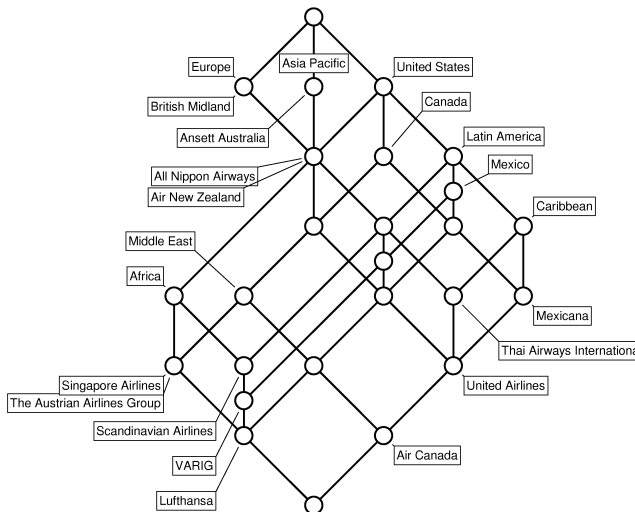
phisch dargestellt werden und zur Kommunikation dienen. Er kann auch mathematisch untersucht werden, um seine Struktur aufzuklären.

### Ein Beispiel über Airlines ...

	Latin America	Europe	Canada	Asia Pacific	Middle East	Africa	Mexico	Caribbean	United States
Air Canada	×	×	×	×	×			×	×
Air New Zealand		×							×
All Nippon Airways		×		×					×
Ansett Australia				×					
The Austrian Airlines Group		×	×	×	×				×
British Midland		×							
Lufthansa	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Mexicana	×	×							
Scandinavian Airlines	×	×		×		×			×
Singapore Airlines		×	×	×	×				×
Thai Airways International	×	×						×	×
United Airlines	×	×	×				×	×	×
VARIG	×	×		×		×	×	×	×

A formal context about the destinations of the Star Alliance members

### ... und sein Begriffsverband



### Formaler Kontext

Ein **formaler Kontext**  $(G, M, I)$  besteht aus einer Menge  $G$ , einer Menge  $M$  sowie einer Relation  $I \subseteq G \times M$ .

Man nennt die Elemente von  $G$  die **Gegenstände**, die von  $M$  die **Merkmale** des formalen Kontextes  $(G, M, I)$ . Statt  $(g, m) \in I$  schreibt man  $g I m$  und liest „der Gegenstand  $g$  hat das Merkmal  $m$ “.

### Die Ableitungsoperatoren

Zu einem formalen Kontext  $(G, M, I)$  definiert man für  $A \subseteq G$

$$A' := \{m \in M \mid gIm \text{ für alle } g \in A\}$$

und entsprechend für  $B \subseteq M$

$$B' := \{g \in G \mid gIm \text{ für alle } m \in B\}.$$

### Formale Begriffe

$(A, B)$  ist genau dann ein **formaler Begriff** des formalen Kontextes  $(G, M, I)$ , wenn gilt:

$$A \subseteq G, \quad B \subseteq M, \quad A' = B \quad \text{und} \quad A = B'.$$

$A$  ist der **Umfang** und  $B$  der **Inhalt** des formalen Begriffs  $(A, B)$ .

Die Menge aller formalen Begriffe wird mit  $\mathfrak{B}(G, M, I)$  notiert.

### Unterbegriff–Oberbegriff

Sind  $(A_1, B_1)$  und  $(A_2, B_2)$  formale Begriffe von  $(G, M, I)$ , dann nennt man  $(A_1, B_1)$  einen **Unterbegriff** von  $(A_2, B_2)$ , wenn der Umfang von  $(A_1, B_1)$  eine Teilmenge des Umfanges von  $(A_2, B_2)$  ist. Als Abkürzung verwendet man dafür das Zeichen „ $\leq$ “, also

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) : \iff A_1 \subseteq A_2 \quad ( \iff B_2 \subseteq B_1).$$

### **Begriffsverband**

Die Menge aller formalen Begriffe von  $(G, M, I)$ , auf diese Weise geordnet, nennt man den **Begriffsverband** des formalen Kontextes  $(G, M, I)$ , im Zeichen

$$\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I).$$

### **Hilfssatz**

Für einen formalen Kontext  $(G, M, I)$  und Mengen  $A, A_1, A_2 \subseteq G$  sowie  $B, B_1, B_2 \subseteq M$  gilt stets

$$(G1) \quad A_1 \subseteq A_2 \quad \Rightarrow \quad A'_2 \subseteq A'_1,$$

$$(G2) \quad A \subseteq A'',$$

$$(G3) \quad A' = A''',$$

$$(M1) \quad B_1 \subseteq B_2 \quad \Rightarrow \quad B'_2 \subseteq B'_1,$$

$$(M2) \quad B \subseteq B'',$$

$$(M3) \quad B' = B''',$$

$$(GM) \quad A \subseteq B' \iff B \subseteq A'.$$

### **Bestimmung aller formalen Begriffe (I)**

1. Lege eine Liste von Begriffsumfängen an. In diese Liste wird zunächst für jedes Merkmal  $m \in M$  der Merkmalumfang  $\{m\}'$  eingetragen. Dabei sind Doppeleintragungen zu vermeiden.
2. Von je zwei Mengen dieser Liste bilde den Durchschnitt. Wenn sich dabei eine Menge ergibt, die noch nicht in der Liste steht, dann füge sie zur Liste dazu. Mit der erweiterten Liste wird weitergearbeitet wie zuvor.

### **Bestimmung aller formalen Begriffe (II)**

3. Wenn für je zwei Mengen in der Liste auch der Durchschnitt der beiden Mengen in der Liste steht, dann erweitere die Liste um die Menge  $G$ , sofern diese noch nicht in der Liste steht. Danach enthält die Liste alle Begriffsumfänge.

4. Berechne zu jedem Begriffsumfang  $A$  in der Liste den zugehörigen Begriffsinhalt  $A'$  und erhalte so eine Liste aller Begriffe.

### Dreiecke und Eigenschaften

Name	Koordinaten	Symbol	Eigenschaft
$D_1$	(0, 0) (6, 0) (3, 1)	a	gleichseitig
$D_2$	(0, 0) (1, 0) (1, 1)	b	gleichschenkelig
$D_3$	(0, 0) (4, 0) (1, 2)	c	spitzwinklig
$D_4$	(0, 0) (2, 0) (1, $\sqrt{3}$ )	d	stumpfwinklig
$D_5$	(0, 0) (2, 0) (5, 1)	e	rechtwinklig
$D_6$	(0, 0) (2, 0) (1, 3)		
$D_7$	(0, 0) (2, 0) (0, 1)		

### Formaler Kontext der Dreiecke

	a	b	c	d	e
$D_1$		×		×	
$D_2$		×			×
$D_3$			×		
$D_4$	×	×	×		
$D_5$				×	
$D_6$		×	×		
$D_7$					×

### Begriffe bestimmen (I)

1. Die Merkmalumfänge sind

$$\begin{aligned}
 \{a\}' &= \{D_4\} \\
 \{b\}' &= \{D_1, D_2, D_4, D_6\} \\
 \{c\}' &= \{D_3, D_4, D_6\} \\
 \{d\}' &= \{D_1, D_5\} \\
 \{e\}' &= \{D_2, D_7\}
 \end{aligned}$$

## Begriffe bestimmen (II)

2. Bildet man die Durchschnitte dieser Mengen, so erhält man außerdem

$$\begin{aligned} \{a\}' \cap \{d\}' &= \emptyset \\ \{b\}' \cap \{c\}' &= \{D_4, D_6\} \\ \{b\}' \cap \{d\}' &= \{D_1\} \\ \{b\}' \cap \{e\}' &= \{D_2\} \end{aligned} .$$

## Begriffe bestimmen (III)

3. Für je zwei Mengen der so erweiterten Liste steht auch ihr Durchschnitt in der Liste. Wir erweitern noch um die Menge aller Gegenstände

$$G = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\}$$

und haben nun eine Liste aller Begriffsumfänge des Kontextes.

4. Für jeden Umfang  $A$  berechnen wir den Inhalt  $A'$  und erhalten so die Liste aller Begriffe dieses Kontextes.

## Die Begriffe des Kontextes

Nummer	(Umfang, Inhalt)
1	$(\{D_4\}, \{a, b, c\})$
2	$(\{D_1, D_2, D_4, D_6\}, \{b\})$
3	$(\{D_3, D_4, D_6\}, \{c\})$
4	$(\{D_1, D_5\}, \{d\})$
5	$(\{D_2, D_7\}, \{e\})$
6	$(\emptyset, \{a, b, c, d, e\})$
7	$(\{D_4, D_6\}, \{b, c\})$
8	$(\{D_1\}, \{b, d\})$
9	$(\{D_2\}, \{b, e\})$
10	$(\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\}, \emptyset)$

## Untere Nachbarn

- Man nennt  $(A_1, B_1)$  einen **echten Unterbegriff** von  $(A_2, B_2)$ , wenn  $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$  und außerdem  $(A_1, B_1) \neq (A_2, B_2)$  gilt.

Man schreibt  $(A_1, B_1) < (A_2, B_2)$  als Abkürzung dafür.

- Man nennt  $(A_1, B_1)$  einen **unteren Nachbarn** von  $(A_2, B_2)$ , wenn  $(A_1, B_1) < (A_2, B_2)$  ist, aber kein Begriff  $(A, B)$  von  $(G, M, I)$  existiert mit  $(A_1, B_1) < (A, B) < (A_2, B_2)$ .

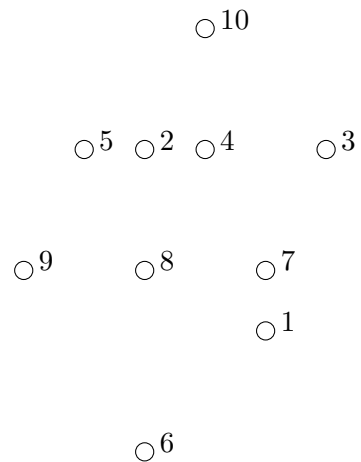
Die Abkürzung dafür ist  $(A_1, B_1) \prec (A_2, B_2)$ .

### Zeichnen eines Liniendiagrammes

5. Lege ein Blatt Papier bereit und zeichne für jeden Begriff einen kleinen Kreis darauf, und zwar so, dass der Kreis für einen Begriff stets höher gezeichnet wird als die Kreise für seine echten Unterbegriffe.
6. Verbinde den Kreis für einen Begriff jeweils mit den Kreisen seiner unteren Nachbarn.
7. Beschrifte mit den Merkmalnamen: Trage jeweils das Merkmal  $m$  am **Merkmalbegriff**  $(\{m\}', \{m\}'')$  ein.
8. Beschrifte mit den Gegenstandsnamen: Trage jeweils den Gegenstand  $g$  am **Gegenstandsbegriff**  $(\{g\}'', \{g\}')$  ein.

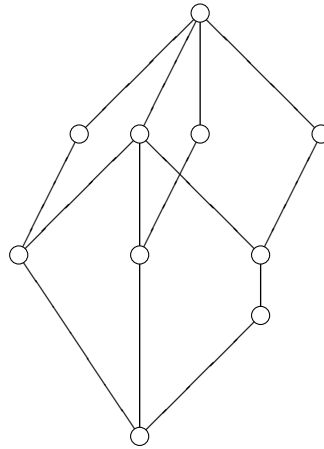
### Diagramm...

5. Für jeden Begriff ein kleiner Kreis aufs Papier:



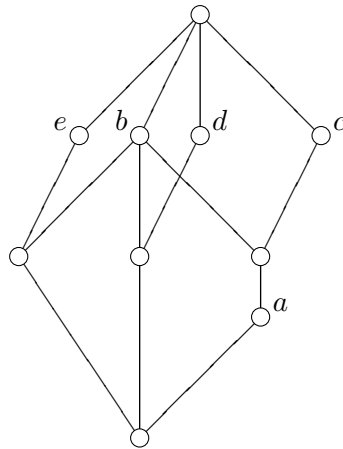
... Diagramm...

6. Mit den unteren Nachbarn verbinden:



... Diagramm...

7. Merkmale eintragen:



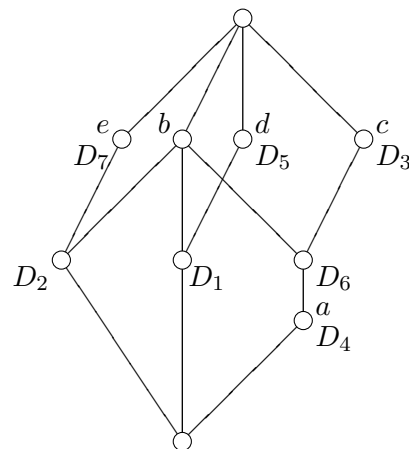
... Diagramm...

8. Gegenstandsbegriffe bestimmen

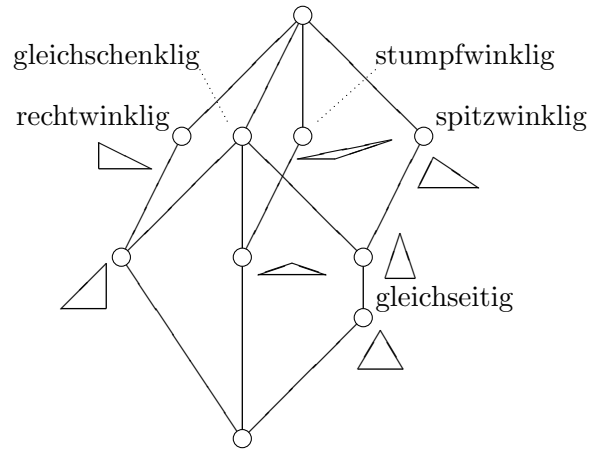
Gegenstand $g$	Gegenstands- inhalt $\{g\}'$	Nummer des Begriffs
$D_1$	$\{b, d\}$	8
$D_2$	$\{b, e\}$	9
$D_3$	$\{c\}$	3
$D_4$	$\{a, b, c\}$	1
$D_5$	$\{d\}$	4
$D_6$	$\{b, c\}$	7
$D_7$	$\{e\}$	5

... Diagramm ...

und eintragen:



... Diagramm!



Nun kann man leicht nachprüfen, ob alles seine Richtigkeit hat.