Vorlesung Diskrete Strukturen
Die Sprache der modernen Mathematik

Bernhard Ganter

WS 2009/10

Definitionen

Wenn im Text ein Begriff **fett** gedruckt ist, dann soll damit deutlich gemacht werden, dass er an dieser Stelle eingeführt wird.

Gewöhnlich geschieht das durch eine Definition, wobei wir nicht so streng formal sind, wie man es in einer Vorlesung für Mathematikstudenten wäre.

Eine Definition fehlt bei den *undefinierten Grundbegriffen* (z.B. „Menge“) und bei Begriffen, die wir als bekannt voraussetzen (z.B. „ganze Zahl“).

Umfangreichere Definitionen werden als solche gekennzeichnet.

Gleichheitszeichen

Wir verwenden zwei Gleichheitszeichen:

$$= \qquad \text{und} \qquad :=$$

Das Zeichen $=$ bezeichnet eine *Aussage*, während $:=$ für *Definitionen* verwendet wird. Beispielsweise ist

$$1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

eine (für jede natürliche Zahl n) richtige Aussage, während durch

$$\binom{n}{2} := \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

festgelegt wird, dass $\binom{n}{2}$ eine Abkürzung für $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ ist.

Häufig benutzte Mengennamen

$\mathbb{N}$ Die Menge $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ aller **natürlichen Zahlen**.

$\mathbb{Z}$ Die Menge $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ aller **ganzen Zahlen**.

$\mathbb{Q}$ Die Menge aller **rationalen Zahlen** (Bruchzahlen).

$\mathbb{R}$ Die Menge aller **reellen Zahlen** (Dezimalzahlen).

$\mathbb{C}$ Die Menge aller *komplexen Zahlen*.

$\emptyset$ oder $\{\}$: Die **leere Menge**, die kein Element hat.

Diese Abkürzungen werden weltweit einheitlich benutzt, mit einer Einschränkung: Viele Autoren zählen, anders als wir, die Null nicht zu den natürlichen Zahlen.

Symbole der Mengensprache

$e \in M$ bedeutet: e ist ein Element der Menge M.

$e \notin M$ bedeutet: e ist nicht Element der Menge M.

$T \subseteq M$ bedeutet: T ist eine **Teilmenge** von M, d.h. jedes Element der Menge T ist auch Element der Menge M.

$|M|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente von M, auch **Mächtigkeit** oder **Kardinalität** von M genannt. Manche Autoren verwenden das Symbol $\#M$.

Mengenangabe durch Aussondern

Die allgemeine Form dieser Schreibweise ist folgende:

$$\{x \in M \mid \text{Bedingung}(x)\}.$$

Damit ist folgendes gemeint: Man schreibt eine öffnende Mengenklammer, dann eine Angabe, aus welcher Menge die Elemente gewählt werden, dann einen senkrechten Strich und danach die Aussonderungsbedingung, die mit einer schließenden Klammer beendet wird. Die so angegebene Menge hat als Elemente genau diejenigen Elemente von M, die die angegebene Bedingung erfüllen.

Mengenoperationen

Aus gegebenen Mengen A und B kann man mit Hilfe der folgenden Operationen neue Mengen konstruieren.

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{e \mid e \in A \text{ oder } e \in B\}, \\ A \cap B &:= \{e \mid e \in A \text{ und } e \in B\}, \\ A \setminus B &:= \{e \mid e \in A \text{ und } e \notin B\}. \end{aligned}$$

Man nennt $A \cup B$ die **Vereinigung**,

$A \cap B$ den **Durchschnitt** und

$A \setminus B$ die **Differenz**

der beiden Mengen A und B. Mehr dazu später.

Tischtennisturnier

Fünf Studenten, nämlich A, B, C, D und E, treten zum Tischtennisturnier an. Es soll *jeder gegen jeden* spielen.

Die Anzahl der dazu erforderlichen Spiele ist 10, denn das ist die Mächtigkeit der Menge aller zweielementigen Teilmengen von $\{A, B, C, D, E\}$:

$$\{\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{A,E\},\{B,C\},\{B,D\},\{B,E\},\{C,D\},\{C,E\},\{D,E\}\}$$

Merke: Elemente einer Menge dürfen selbst Mengen sein.

Beispiel einer Mengenkonstruktion

$$\{\{a, b\} \mid a, b \in \mathbb{N}, 0 < a < b < 5\}$$

ist dasselbe wie die Menge

$$\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}.$$

Die Elemente dieser Menge sind selbst Mengen, nämlich genau die sechs zweielementigen Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$.

n **über** k

$$\binom{n}{k}$$

bezeichnet die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Das Symbol $\binom{n}{k}$ wird **Binomialkoeffizient** genannt und „n über k“ gelesen.

Es kommt vor in der **Binomischen Formel**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Induktionsbeweis

Satz 1. *Die Anzahl der zweielementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist*

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Der *Beweis* erfolgt durch **Induktion** über n:

1. Für den Fall $n = 0$ ist die Behauptung offenbar richtig: eine Menge mit Null Elementen, also die leere Menge, hat Null zweielementige Teilmengen. Das ist die **Induktionsverankerung**.

Induktionsschritt

1. Im **Induktionsschritt** beweisen wir nun: wenn die Behauptung für eine Zahl n richtig ist, dann ist sie auch für $n+1$ richtig:

   Betrachte eine beliebige $n+1$-elementige Menge M und gib, zur leichteren Formulierung des Folgenden, einem Element von M einen Namen, sagen wir a. M hat genau n zweielementige Teilmengen, die a als Element enthalten, nämlich genau die Mengen der Form $\{a, x\}$ mit $x \in M$, $x \neq a$.

... weiter im Beweis

Die übrigen zweielementigen Teilmengen von M sind genau die zweielementigen Teilmengen von $M \setminus \{a\}$. Diese Menge, also $M \setminus \{a\}$, hat n Elemente und nach der **Induktionsannahme** genau

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

zweielementige Teilmengen. Die Anzahl der zweielementigen Teilmengen von M ist deshalb gleich

$$n + \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

und dies ist dasselbe wie $\frac{(n+1) \cdot n}{2}$, was zu beweisen war.

Dreieckzahlen

Die Zahlen der Form $\binom{n}{2}$ nennt man auch die **Dreieckzahlen**. Die ersten Werte sind

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\binom{n}{2}$	0	0	1	3	6	10	15	21	28

Man erkennt (und beweist ohne Mühe), dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + \ldots + (n-1)$$

gilt.

Eine wichtige Beobachtung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Die Anzahl der Möglichkeiten, aus $n+1$ Dingen k auszuwählen, ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus n Dingen $k-1$ auszuwählen plus der Anzahl der Möglichkeiten, aus n Dingen k auszuwählen.

Satz

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

Dabei ist

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \qquad \text{(lies: „}n\ \textbf{Fakultät}\text{“)},$$

speziell

$$0! = 1.$$

Das Pascalsche Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1 \\
\ldots&&&&&&&\ldots&&&&&&&\ldots
\end{array}$$

Potenzmenge

Die **Potenzmenge** $\mathfrak{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M.

Für endliche Mengen gilt $|\mathfrak{P}(M)| = 2^{|M|}$.

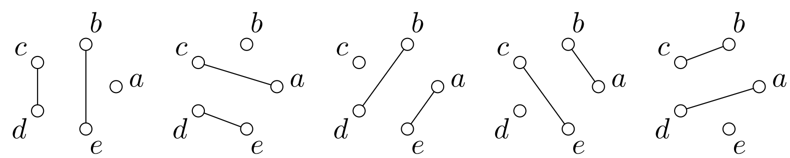
Insbesondere gilt also für alle natürlichen Zahlen n und k folgendes:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Teilmengen der Menge $\{\texttt{cd}, \texttt{cp}, \texttt{ls}, \texttt{mv}\}$

	cd	cp	ls	mv	Nr.
$\{\}$					0000
$\{\texttt{mv}\}$				$\times$	0001
$\{\texttt{ls}\}$			$\times$		0010
$\{\texttt{ls}, \texttt{mv}\}$			$\times$	$\times$	0011
$\{\texttt{cp}\}$		$\times$			0100
$\{\texttt{cp}, \texttt{mv}\}$		$\times$		$\times$	0101
$\{\texttt{cp}, \texttt{ls}\}$		$\times$	$\times$		0110
$\{\texttt{cp}, \texttt{ls}, \texttt{mv}\}$		$\times$	$\times$	$\times$	0111
$\{\texttt{cd}\}$	$\times$				1000
$\{\texttt{cd}, \texttt{mv}\}$	$\times$			$\times$	1001
$\{\texttt{cd}, \texttt{ls}\}$	$\times$		$\times$		1010
$\{\texttt{cd}, \texttt{ls}, \texttt{mv}\}$	$\times$		$\times$	$\times$	1011
$\{\texttt{cd}, \texttt{cp}\}$	$\times$	$\times$			1100
$\{\texttt{cd}, \texttt{cp}, \texttt{mv}\}$	$\times$	$\times$		$\times$	1101
$\{\texttt{cd}, \texttt{cp}, \texttt{ls}\}$	$\times$	$\times$	$\times$		1110
$\{\texttt{cd}, \texttt{cp}, \texttt{ls}, \texttt{mv}\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	1111

Tischtennisturnierplan



$\{\{\{b,e\},\{c,d\}\},\{\{a,c\},\{d,e\}\},\{\{a,e\},\{b,d\}\},\{\{a,b\},\{c,e\}\},\{\{a,d\},\{b,c\}\}\}.$

Paare als Mengen

Die Menge $\{\{a\},\{a,b\}\}$ nennt man ein **Paar** mit den Komponenten a und b. Als Abkürzung verwendet man (a,b). Es ist also

$$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}.$$

Damit definiert man nun die **Produktmenge** zweier Mengen A und B als

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Man hat $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Die Teilmengen von $A \times B$ nennt man **Relation**en zwischen A und B.

Mengenoperationen

Sind A und B Mengen, dann bezeichnet

$A \cup B$ die **Vereinigungsmenge** von A und B, deren Elemente genau diejenigen sind, die in mindestens einer dieser beiden Mengen Element sind.

$A \cap B$ die **Schnittmenge** (den **Durchschnitt**) von A und B. Die Elemente des Durchschnitts sind genau diejenigen, die sowohl Element von A als auch von B sind.

$A \setminus B$ die **Differenzmenge** von A und B, also diejenige Menge, die diejenigen Elemente von A enthält, die nicht Elemente von B sind, und keine weiteren Elemente.

Allgemeine Mengenoperationen

Die Mengenoperationen Durchschnitt und Vereinigung kann man auch für mehr als zwei Mengen verwenden. Statt

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

kann man dann gleichwertig

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

schreiben oder auch

$$\bigcap \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}.$$

Menge von Mengen

Ist $\mathcal{F}$ eine Menge, deren Elemente Teilmengen einer Menge M sind, dann ist

$$\bigcap \mathcal{F} := \{x \in M \mid x \in F \text{ für alle } F \in \mathcal{F}\}.$$

Entsprechend definiert man $\bigcup$.

Rechenregeln für Mengenoperationen

- **Idempotenz**:
  $A \cup A = A$,
  $A \cap A = A$
- **Kommutativität**:
  $A \cup B = B \cup A$,
  $A \cap B = B \cap A$
- **Assoziativität**:
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Distributivität**:
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Komplement und symmetrische Differenz

Wenn man mit Teilmengen einer festen Grundmenge M rechnet, verwendet man gelegentlich die Abkürzung

$$\overline{A} := M \setminus A$$

und nennt $\overline{A}$ das **Komplement** von A (in M).

Eine weitere wichtige Mengenoperation ist die **symmetrische Differenz**

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Die symmetrische Differenz ist kommutativ und assoziativ. Wir werden später sehen, dass es sich sogar um eine *Gruppenoperation* handelt.

Vor 114 Jahren: Ein sorgfältiger Aufbau der Mathematik

Der mathematische Begriff einer Menge geht auf den Mathematiker **Georg Cantor** zurück. Er formulierte 1895

> *Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammen- fassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Er legte damit den Grundstein zu einem systematischen Aufbau der Mathematik. Auf wenige *undefinierte Grundbegriffen* wie „Menge“ und „Element“ sollten alle Begriffe der Mathematik durch genaue *Definitionen* aufgebaut werden.

Diese Idee ist bis heute außerordentlich erfolgreich.

Vor 100 Jahren: Die Mathematik in der Krise

Wenig später bemerkte man, dass man mit dem Mengenbegriff nicht völlig naiv umgehen darf, weil man sonst zu *Antinomien*, d.h. Widersprüchen innerhalb der Theorie kommt.

Das hatte auch Georg Cantor bemerkt, aber nicht publiziert. Anfang des 20. Jahrhunderts veröffentlichte Bertrand Russell einen solchen Widerspruch, der heute als „Russellsche Antinomie“ bekannt ist.

Ein innerer Widerspruch ist für die Mathematik aber eine Katastrophe, denn ihre Stärke besteht ja darin, dass ihre Ergebnisse absolut zuverlässig sind.

Die Russellsche Antinomie

Mengen sind offenbar Objekte unseres Denkens. Deshalb kann man nach Cantors Festlegung die *Menge aller Mengen* bilden, und, als Teilmenge davon, die *Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.* In der Formelsprache:

$$\{x \mid x \notin x\}.$$

Enthält diese Menge sich selbst als Element?

- Wenn ja, dann muss sie die Bedingung $x \notin x$ erfüllen, darf sich also nicht als Element enthalten.
- Wenn nein, dann darf sie die Bedingung $x \notin x$ nicht erfüllen, muss sich also als Element enthalten.

Beide Antwortmöglichkeiten führen auf einen Widerspruch!

Die Grundlagenkrise der modernen Mathematik

Die Möglichkeit von inneren Widersprüchen in der Mathematik war ein Schock! Das musste repariert werden!

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts gab es deshalb eine tiefe Auseinandersetzung mit den Grundlagen der Mathematik. Die Mathematik entschied sich für die sogenannte *axiomatische Methode* und sicherte ihre Vorgehensweise durch die *mathematische Logik*.

Viele der dabei gewonnenen Erkenntnisse sind heute auch grundlegend für die Informatik!

Der Weg aus der Krise

Um der Russellschen Antinomie zu entgehen, durfte man nicht mehr völlig beliebige Mengenkonstruktionen zulassen. Mengen-Monster wie die „Menge aller Mengen“ konnten nicht erlaubt sein.

Das erforderte genaue Regeln, welche Mengen in der Mathematik erlaubt sind und welche nicht. Dies führte zur heute üblichen *axiomatischen Mengenlehre*.

Das ist in wunderbarer Klarheit vorzüglich dargestellt in dem auch für Studenten gut lesbaren Buch *Naive Mengenlehre* von Paul Halmos. Ein Klassiker!

Selbstreferenziell

Was machte die Katastrophe, die Antinomie eigentlich möglich?

Es ist die *Selbstreferenzialität*, also der Umstand, dass eine Definition auf sich selbst Bezug nimmt, wie die der „Menge aller Mengen“.

In der theoretischen Informatik benutzt man solche Selbstreferenzialitäten, um nachzuweisen, dass bestimmte Probleme durch Algorithmen nicht entscheidbar sind.

Dazu zählt das *Halteproblem für Turingmaschinen*.