TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Bernhard Ganter

Einführung in die Mathematik für Informatiker WS 2009/10
Vorlesung Diskrete Strukturen

3. Übungsblatt für die Woche 2.11. - 6.11.2009

Abbildungen

DS-Ü13 Für welches $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 100$?

Finde eine allgemeine Formel für $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

DS-Ü14 Sei $f : S \to T$ eine Abbildung.
Zeige, dass für beliebige Teilmengen A, B von S gilt $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
Zeige, dass f genau dann injektiv ist, wenn für alle A, $B \subseteq S$ gilt:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Gib ein Beispiel an, in dem $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

DS-Ü15 Eine Abbildung $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathcal{P}(A \times A)$ sei definiert durch

$$f(T) = \{(a, b) \in A \times A \mid a \in T \wedge b \in A \setminus T\}.$$

(a) Wähle $A = \{1, 2, 3\}$, und stelle diese Abbildung als Wertetabelle dar.

(b) Wieviel Elemente haben die Mengen $\mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset\}$ und $\mathcal{P}(A\times A)$, falls A endlich ($|A| = n$) ist?

(c) Welche Eigenschaften (injektiv, surjektiv, bijektiv) hat diese Abbildung für beliebige Mengen A (Beweis bzw. Gegenbeispiel)?

DS-H16 Welche reellen Polynomfunktionen sind injektiv, welche surjektiv, welche bijektiv?

DS-H17 Zeige, dass $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} j = \binom{n+2}{3}$ gilt.

DS-H18 (a) Sind die sechs folgenden Abbildungen $f_k : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ bijektiv?

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = 1 - x,\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = \frac{1}{1-x},\ f_5(x) = \frac{x-1}{x},\ f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

(b) Bilde die Hintereinanderausführung $f_k \circ f_j$ von jeweils zwei dieser Abbildungen. Für welche k, j gilt $f_k \circ f_j = f_j \circ f_k$, ($k, j \in \{1, 2, \ldots, 6\}$) ?