TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Bernhard Ganter

Einführung in die Mathematik für Informatiker WS 2009/10
Vorlesung Diskrete Strukturen

4. Übungsblatt für die Woche 9.11. - 13.11.2009

Natürliche Zahlen, Teilbarkeit

DS-Ü19 (a) Geben Sie für jede der folgenden Zahlen die kanonische Darstellung an:

$$51,\ 100,\ 101,\ 1001,\ 1122,\ 34969,\ 10!,\ \mathrm{kgV}(1,2,3,\cdots,40) \quad .$$

Wieviele Teiler hat 10! ?

(b) Berechnen Sie den Wert der Eulerschen φ–Funktion für folgende Argumente:

$$51,\ 100,\ 101,\ 1001,\ 1122,\ 10! \quad .$$

DS-Ü20 Berechnen Sie für die gegebenen Zahlenpaare n, m mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus jeweils den größten gemeinsamen Teiler und stellen Sie ihn in der Form

$$\mathrm{ggT}(n,m) = \nu n + \mu m$$

mit $\nu, \mu \in \mathbb{Z}$ dar:

(i) $n := 24,\ m := 135$, (ii) $n := 19,\ m := 51$, (iii) $n := -567,\ m := 266$.

DS-Ü21 Wie viele gekürzte Brüche $\frac{z}{n}$ mit $0 < \frac{z}{n} \leq 1$ und $n < 15$ gibt es? $(z, n \in \mathbb{N})$

DS-H22 Stellen Sie zum Teilerverband der Zahl 72 den formalen Kontext auf, zeichnen Sie ein Diagramm des Begriffsverbandes und beschriften Sie die Elemente mit den jeweils dazugehörigen Teilern.

DS-H23 (a) Berechnen Sie zu den angegebenen Zahlenpaaren a, b den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a,b)$ und stellen Sie diesen als Linearkombination $\alpha \cdot a + \beta \cdot b$ dar.

(i) $a := 170$, $b := 3003$, (ii) $a := 504$, $b := -294$, (iii) $a := 1970$, $b := 1066$.

Geben Sie auch jeweils das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(a,b)$ an.

(b) Ermitteln Sie $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a,b),c)$ für $a := 150$, $b := 105$, $c := 56$, und stellen Sie diese Zahl in der Form $\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ dar.

DS-H24 (a) Beweisen Sie, dass $n^5 - 5n^3 + 4n$ für jede natürliche Zahl n durch 120 teilbar ist.

(b) Für welche Primzahlen p ist $p^2 - 1$ durch 24 teilbar (Begründung!)?

(c) Zeigen Sie, dass jede sechsstellige Zahl der Form *ababab* durch 7 teilbar ist.

(d) Die **Fibonacci-Zahlen** sind durch folgende Zahlenfolge rekursiv definiert:

$$f_0 := 0,\ f_1 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n \text{ für } n \geq 0.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen teilerfremd sind.