Vorlesung Diskrete Strukturen
Relationen

Bernhard Ganter

Institut für Algebra
TU Dresden
D-01062 Dresden
bernhard.ganter@tu-dresden.de

WS 2009/10

Relationen

Es seien A und B Mengen. Eine (binäre) **Relation** zwischen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$.

Ein wichtiger Spezialfall ist der, dass die Mengen A und B identisch sind:

Eine binäre **Relation** auf einer Menge A ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times A$, also eine Menge, deren Elemente Paare von Elementen von A sind. Statt $(a, b) \in R$ schreibt man oft auch $a\ R\ b$.

Wir haben bereits n-stellige Relationen ($n \in \mathbb{N}$) definiert als die Teilmengen von A^n, der Menge aller n-Tupel.
Wenn nichts dazu gesagt wird, ist $n = 2$ gemeint.

Eigenschaften von Relationen

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt

reflexiv auf A, falls $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$ gilt,

irreflexiv, falls $(a, a) \in R$ für kein $a \in A$ gilt,

symmetrisch, falls aus $(a, b) \in R$ stets auch $(b, a) \in R$ folgt,

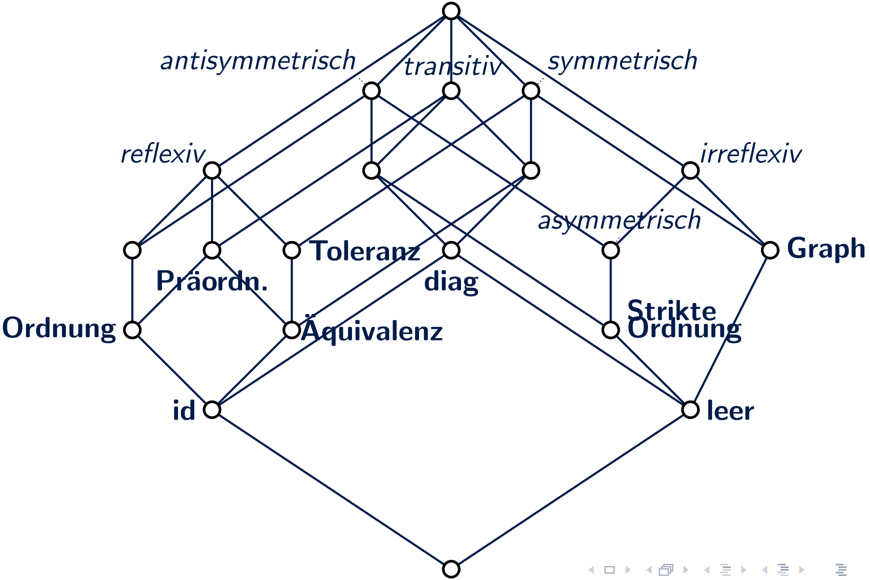
antisymmetrisch, falls aus $(a, b) \in R$ und $a \neq b$ stets $(b, a) \notin R$ folgt, und

konnex, falls aus $(a, b) \notin R$ und $a \neq b$ stets $(b, a) \in R$ folgt, und

transitiv, falls aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ stets $(a, c) \in R$ folgt.

„Stets" bedeutet dabei: für jede Wahl der Elemente $a, b, c \in A$.

Wichtige Klassen von binären Relationen auf A



Relationenprodukt

Das **Relationenprodukt** von Relationen R und S auf A ist wie folgt definiert:

$$R \mathbin{;} S := \{(a,c) \mid \text{ es gibt ein } b \text{ mit } (a,b) \in R \text{ und } (b,c) \in S\}.$$

Das Relationenprodukt ist assoziativ.

Inverse Relation, Gleichheitsrelation

Die **inverse Relation** zu einer Relation R ist gegeben durch

$$R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Die **Gleichheitsrelation** auf A ist

$$\mathrm{id}_A := \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

Für diese Relation gibt es viele Namen, z.B. „die Identität", „die Diagonale" oder einfach Δ.

Manchmal braucht man auch die **Allrelation** $\nabla_A := A \times A$.

Eigenschaften, anders formuliert

Ist R eine Relation auf A, dann gilt

- R ist genau dann reflexiv, wenn $\mathrm{id}_A \subseteq R$,
- R ist genau dann irreflexiv, wenn $\mathrm{id}_A \cap R = \emptyset$,
- R ist genau dann symmetrisch, wenn $R = R^{-1}$,
- R ist genau dann antisymmetrisch, wenn $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$,
- R ist genau dann transitiv, wenn $R \,;\, R \subseteq R$,
- R ist genau dann konnex, wenn $R \cup R^{-1} = A \times A$ gilt.

Gerichteter Graph

Ist $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A, dann nennt man (A, R) auch einen **gerichteten Graphen** mit **Eckenmenge** A und **Bögenmenge** R.

Man veranschaulicht solche gerichteten Graphen durch Diagramme, bei denen die Kanten aber eine Richtung haben, was durch einen Pfeil angedeutet wird.

Hat eine Relation spezielle Eigenschaften, dann können andere Darstellungsformen besser sein.

Äquivalenzrelation

Eine Relation $\Theta \subseteq A \times A$ heißt **Äquivalenzrelation** auf A, wenn Θ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Das einfachste Beispiel einer Äquivalenzrelation ist die Gleichheitsrelation id_A.

Man kann Äquivalenzrelationen als *verallgemeinerte Gleichheiten* deuten.

Äquivalenzklassen

Ist Θ eine Äquivalenzrelation auf A, so definiert man für $a \in A$

$$a/\Theta := \{b \in A \mid (a,b) \in \Theta\}$$

und nennt dies die **Äquivalenzklasse** von a nach Θ.

Andere Schreibweisen dafür sind z.B.: $[a]\Theta$, a^Θ.

Faktormenge

Die Menge der Äquivalenzklassen nach Θ wird mit A/Θ bezeichnet, es ist also

$$A/\Theta := \{a/\Theta \mid a \in A\}.$$

Man bezeichnet A/Θ als die **Faktormenge** von A nach Θ.

Die **kanonische Projektion** $\pi_\Theta : A \to A/\Theta$ ist die Abbildung, die jedes Element a von A auf die Äquivalenzklasse abbildet, in der es liegt.

Hilfssatz

Hilfssatz *Für je zwei Elemente $a, b \in A$ gilt entweder*

$$a/\Theta = b/\Theta$$

oder

$$a/\Theta \cap b/\Theta = \emptyset.$$

Mit anderen Worten:
Äquivalenzklassen sind disjunkt oder gleich.

Partition

Eine **Partition** einer Menge A ist eine Menge $\mathcal{P}$ nicht leerer Teilmengen von A, die paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung gleich A ist.

Man nennt die Elemente von $\mathcal{P}$ die **Klassen** der Partition $\mathcal{P}$.

Andere Namen sind: Blöcke, Fasern. All diese Namen bedeuten eigentlich „Menge(n)“.

Anders gesagt. . .

Eine Partition von A ist also eine Menge

$$\mathcal{P} := \{A_i \mid i \in I\}$$

von Mengen mit den folgenden Eigenschaften:

1. Jedes A_i enthält mindestens ein Element,
2. alle Elemente der A_i sind auch Elemente von A,
3. jedes Element von A kommt in genau einer der Mengen A_i vor.

Äquivalenz vs. Partition

Hilfssatz *Die Faktormenge A/Θ einer Äquivalenzrelation Θ auf einer Menge A ist stets eine Partition.*

Umgekehrt gilt: Ist $\mathcal{P}$ eine Partition von A, dann ist

$$\Theta_{\mathcal{P}} := \bigcup_{A_i \in P} A_i \times A_i$$

eine Äquivalenzrelation.

Für jede Äquivalenzrelation Θ auf A gilt $\Theta = \Theta_{A/\Theta}$ und für jede Partition $\mathcal{P}$ von A gilt $A/\Theta_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$.

Gröber – feiner

Eine Äquivalenzrelation Θ auf A ist **feiner** (oder gleich) als eine Äquivalenzrelation Ψ auf A, falls

$$\Theta \subseteq \Psi.$$

Gleichbedeutend dazu ist, dass Ψ **gröber** (oder gleich) ist als Θ.

Man nennt dann Θ eine **Verfeinerung** von Ψ und Ψ eine **Vergröberung** von Θ.

Θ ist genau dann feiner oder gleich Ψ, wenn jede Äquivalenzklasse von Θ Teilmenge einer Äquivalenzklasse von Ψ ist. Wir nennen dann auch die zu Θ gehörende Partition feiner als die zu Ψ gehörige.

Splits

Eine Partition einer Menge A in genau zwei Klassen nennt man einen **Split** der Menge A.

Die Anzahl der Splits von A ist $2^{|A|-1} - 1$.

Die Menge aller Splits von A bezeichnen wir mit **Splits**(A).

Jede Partition ist durch die Menge der sie vergröbernden Splits eindeutig bestimmt.

Ein Split ist mit einer Äquivalenzrelation Θ **verträglich**, wenn er die zu Θ gehörige Partition vergröbert.

Ein formaler Kontext

Definiert man zu vorgegebener Menge A einen formalen Kontext

$$(A \times A, \textbf{Splits}(A), \diamond)$$

durch

$$(a,b) \diamond \{X, A \setminus X\} :\iff \{a,b\} \subseteq X \text{ oder } \{a,b\} \subseteq A \setminus X,$$

so sind die Begriffsumfänge dieses Kontextes genau die Äquivalenzrelationen auf A.

Der Begriffsinhalt zum Begriffsumfang Θ ist die Menge der mit Θ verträglichen Splits.

Der Verband der Äquivalenzrelationen

Die Äquivalenzrelationen auf A, geordnet durch die feiner-gröber–Relation, bilden einen vollständigen Verband.

Der Durchschnitt beliebig vieler Äquivalenzrelationen ist wieder eine Äquivalenzrelation.

Die Vereinigung $\Theta \cup \Psi$ zweier Äquivalenzrelationen Θ und Ψ ist meist keine Äquivalenzrelation.

Es gibt aber stets eine feinste Äquivalenzrelation, die $\Theta \cup \Psi$ enthält. Man erhält sie als die **transitive Hülle** von $\Theta \cup \Psi$.

Anzahl der Partitionen

Wieviele Möglichkeiten gibt es, n Dinge in k Klassen aufzuteilen? Präziser gefragt: Wieviele k-elementige Partitionen hat eine n-elementige Menge?

Satz (Stirling): *Die Anzahl der k-elementigen Partitionen einer n-elementigen Menge ist*

$$S(n,k) := \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n.$$

Stirling–Zahlen

Die Zahlen $S(n,k)$ nennt man die **Stirling–Zahlen** zweiter Art.
Man berechnet sie gern rekursiv mit Hilfe folgender Informationen:

1. $S(n,k) = 0$ falls $n < k$,
2. $S(n,n) = 1 = S(n,1)$ für alle n, und
3. $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$ für alle n und k.

$S(n,2)$ ist natürlich die Anzahl der Splits einer n-elementigen Menge.

Tafel der Stirling-Zahlen

	$n =$ 1	2	3	4	5	6	7	8
$k = 1$	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	3	7	15	31	63	127
3			1	6	25	90	301	966
4				1	10	65	350	1701

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$$

Die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Mengen wird mit B_n bezeichnet. Die Zahlen B_n nennt man die **Bell–Zahlen**. Man hat $B_0 = 1,\ B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,\ B_4 = 15.$

Eine Rekursion für die Bell–Zahlen

Für die Bell–Zahlen gibt es (wie für die Stirling–Zahlen) keine einfache explizite Darstellung, aber eine schöne Rekursionsformel:

Satz

Für $n \geq 1$ gilt

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} B_4 &= \binom{3}{0} B_3 + \binom{3}{1} B_2 + \binom{3}{2} B_1 + \binom{3}{3} B_0 \\ &= 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 15. \end{aligned}$$

Der Kern einer Abbildung

Ist

$$f : A \to B$$

eine Abbildung, dann ist der **Kern** von f die Relation $\ker f$, die durch

$$\ker f := \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\}$$

definiert ist.

Anders formuliert: Der Kern von $f : A \to B$ ist diejenige Relation Relation $\varrho := \ker f$ auf A, die

$$x \varrho y \iff f(x) = f(y)$$

für alle $x, y \in A$ erfüllt.

Der Kern ist eine Äquivalenz

Satz

Der Kern einer beliebigen Abbildung $f : A \to B$ ist eine Äquivalenzrelation auf A.

Frage: Haben diejenigen Äquivalenzrelationen, die Kerne von Abbildungen sind, besondere Eigenschaften? Der folgende Satz zeigt, dass die Antwort „nein“ ist:

Satz

Für jede Äquivalenzrelation Θ gilt

$$\Theta = \ker \pi_\Theta .$$

Wieviele Abbildungen?

Wieviele Abbildungen

$$f : A \to B$$

gibt es für vorgegebene Mengen A und B?

Wir kennen die Antwort:

$$|B^A| = |B|^{|A|}.$$

Aber wieviele dieser Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

Bijektive Abbildungen

Die Anzahl der *bijektiven* Abildungen von A nach B ist nur dann ungleich Null, wenn A und B gleich mächtig sind:

Satz

Die Anzahl der bijektiven Abbildungen von A nach B ist

- 0, *wenn* $|A| \neq |B|$, *und*
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$, *wenn* $|A| = |B| =: n$.

Satz (Stirling–Formel)

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Injektive Abbildungen

Die Anzahl der *injektiven* Abildungen von A nach B ist nur dann ungleich Null, wenn A höchstens so viele Elemente hat wie B:

Satz

Die Anzahl der injektiven Abbildungen von A nach B mit $n := |A|$ und $m := |B|$ ist gleich Null, falls $n > m$ und sonst gleich

$$n! \cdot \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Surjektive Abbildungen

Die Anzahl der *surjektiven* Abildungen von A nach B ist nur dann ungleich Null, wenn A mindestens so viele Elemente hat wie B:

Satz

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen von A nach B mit $n := |A|$ und $m := |B|$ ist gleich Null, falls $n < m$ und sonst gleich

$$m! \cdot S(n, m) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^n.$$