TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Bernhard Ganter

Einführung in die Mathematik für Informatiker WS 2009/10
Vorlesung Diskrete Strukturen

7. Übungsblatt für die Woche 30.11. - 4.12.2009

Gruppen, Untergruppen

DS-Ü37 (a) Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen größer 1 mit der Operation $a * b := a^{\ln b}$ eine kommutative Gruppe bildet.

(b) Man bestimme alle Gruppen der Ordnung 3.

DS-Ü38 Vervollständigen Sie die Multiplikationstabellen

(a)

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b			
c	c			
d	d		c	

(b)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a		
c	c		a	
d	d			

so, dass die Menge $\{a, b, c, d\}$ mit den durch die Tafeln definierten Operationen eine Gruppe bildet (die Elemente sind paarweise verschieden). Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? Geben Sie jeweils die Ordnung der Elemente und alle Untergruppen an.

DS-Ü39 (a) Zeigen Sie, dass es in jeder Gruppe gerader Ordnung mindestens ein Element der Ordnung 2 gibt.

(b) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe, und für alle $a, b \in G$ gelte $(a * b)^2 = a^2 * b^2$. Zeigen Sie, dass die Gruppe kommutativ ist.

DS-H40 (a) Zeigen Sie, dass die Menge der vierten Einheitswurzeln bezüglich der Multiplikation von komplexen Zahlen eine Untergruppe von $(\mathbb{C}, \cdot)$ ist.

(b) Welche Untergruppen dieser Gruppe gibt es? Welche Ordnung haben die Elemente? Geben Sie zu jedem Element das multiplikativ Inverse an.

(c) Welche Elemente sind primitiv?

(d) Stellen Sie die Gruppentafel für $(\mathbb{Z}_4, +)$ auf und vergleichen Sie diese mit der Gruppe der vierten Einheitswurzeln.

DS-H41 (a) Betrachten Sie die Gruppe $(\mathbb{Z}_{15}, +)$. Ermitteln Sie alle Elemente von $< 2 >$ und $< 6 >$ und die Ordnungen aller Elemente dieser Gruppe. Bestimmen Sie alle Untergruppen dieser Gruppe.

(b) Bezüglich der Multiplikation bildet $\mathbb{Z}_{15}$ keine Gruppe. Geben Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}_{15}$ an. Verifizieren Sie, dass diese eine Gruppe bezüglich der Multiplikation mod 15 bilden.

DS-H42 Zeigen Sie, dass die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe der Ordnung 8 erzeugen (*Quaternionengruppe* Q_8):

(a) Man bestimme die Ordnungen von A und B.

(b) Zeigen Sie, dass man jedes Element von Q_8 in der Form $A^k B^j$ schreiben kann.

(c) Vergleichen Sie diese Gruppe mit der Gruppe aus Aufgabe H35.