TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Bernhard Ganter

Einführung in die Mathematik für Informatiker WS 2009/10
Vorlesung Diskrete Strukturen

8. Übungsblatt für die Woche 7.12. - 11.12.2009

Relationen

DS-Ü43 (a) Auf der Menge $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$ sei die Relation $R = \{(1, 6), (2, 3), (4, 2)\}$ gegeben.
Man bestimme jeweils die Relationen
$S := R \cup R^{-1},\ S^2 := S; S,\ T := S \cup S^2$ und $E := T \cup I_A$.
Zeigen Sie, dass E eine Äquivalenzrelation auf A ist, und geben Sie die Faktormenge A/E an.

(b) Gesucht ist die Äquivalenzrelation $\widetilde{R}$ auf der Menge $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$, für die die Partition $\{\{1, 4, 6\}, \{2\}, \{3, 5\}\}$ die Faktormenge $A/\widetilde{R}$ ist.

DS-Ü44 Geben Sie je eine binäre Relation (auf einer „kleinen“ Menge) an, die

(a) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv
(b) reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch
(c) symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist.

Zeichnen Sie die zugehörigen Pfeildiagramme.

DS-Ü45 (a) Es seien R, S, T binäre Relationen auf einer Menge A.
Beweisen Sie folgende Beziehungen:
(i)$(R \cap S); T \subseteq (R; T) \cap (S; T)$ (ii) $(R; S)^{-1} \quad = \quad S^{-1}; R^{-1}$
Belegen Sie durch ein Beispiel, dass bei (i) die Gleichheit nicht gilt.

(b) Es sei R eine binäre Relation auf einer Menge A.
Beweisen Sie (elementfreie Charakterisierung der Eigenschaften binärer Relationen):
(i) R ist genau dann symmetrisch, wenn $R^{-1} \subseteq R$ gilt.
Es gilt dann sogar die Gleichheit.
(ii) R ist genau dann transitiv, wenn $R; R \subseteq R$ gilt.

DS-H46 Geben Sie alle 16 binären Relationen auf der Menge $\{0, 1\}$ an. Überprüfen Sie jede dieser Relationen auf die Merkmale Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität. Tragen Sie die Ergebnisse in eine Kreuztabelle ein. Durch diese Tabelle ist ein formaler Kontext bestimmt. Bilden Sie alle formalen Begriffe, und zeichnen Sie das Liniendiagramm des Begriffsverbandes.

DS-H47 Auf der Menge $A = \{2, 3, 4, 5\}$ seien die beiden Relationen S und T wie folgt gegeben:
$S = \{(a, b) \mid a + b = 6\}$ und $T = \{(a, b) \mid a \text{ ist teilerfremd zu } b\}$.

(i) Geben Sie alle Paare von S und T an.

(ii) Stellen Sie beide Relationen durch Pfeildiagramme dar.

(iii) Ermitteln Sie alle Paare von $S;S$, $T;S$ und $S;T$.

DS-H48 (a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen R bzw. $\sim$ auf der jeweiligen Menge A Äquivalenzrelationen sind:

(i) $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$; $R = \{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (6, 1)\} \cup I_A$.

(ii) $A = \mathbb{R}$; $x \sim y$ gdw. $|x - y| < \pi$

(iii) $A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $a \sim b$ gdw. $ab \geq 0$
Welche Eigenschaften von $\sim$ gehen verloren, falls $A = \mathbb{Z}$ gewählt wird?

(iv) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$; $(a, b) \sim (c, d)$ gdw. $ad = bc$

(b) Zu den in Aufgabe (a) gefundenen Äquivalenzrelationen charakterisiere man die zugehörigen Äquivalenzklassen.