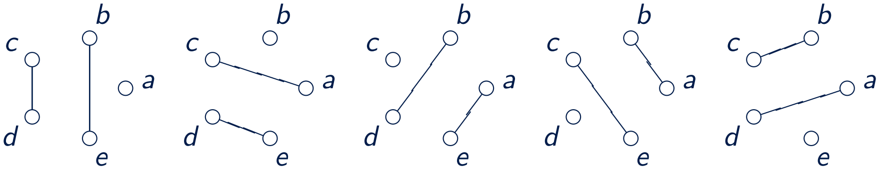
Vorlesung Diskrete Strukturen
Graphen

Bernhard Ganter

Institut für Algebra
TU Dresden
D-01062 Dresden
bernhard.ganter@tu-dresden.de

WS 2009/10

Ein Turnierplan mit fünf Runden



Das Diagramm beschreibt einen Turnierplan für fünf Teilnehmer, bei dem „jeder gegen jeden“ spielt. Das Turnier ist in fünf Runden mit jeweils zwei parallel stattfindenden Spielen organisiert.

Etwas schwieriger ist es, einen entsprechenden Spielplan für ein Doppel-Turnier zu entwerfen. Bei einem solchen Turnier spielen je zwei Spieler genau einmal gegen je zwei andere.

Definition: Graph

Ein (schlichter) **Graph** (V, E) besteht aus einer Menge V und einer Menge E von zweielementigen Teilmengen von V.

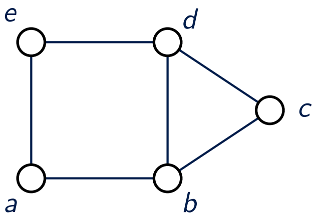
Die Elemente von V nennt man die **Ecken** und die von E die **Kanten** des Graphen (V, E).

Definition: Graph

Ein (schlichter) **Graph** (V, E) besteht aus einer Menge V und einer Menge E von zweielementigen Teilmengen von V.

Die Elemente von V nennt man die **Ecken** und die von E die **Kanten** des Graphen (V, E).

Kleine Graphen kann man gut durch Diagramme angeben.



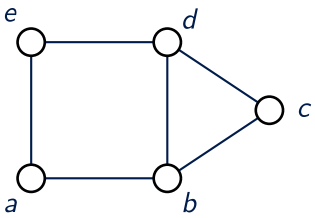
$$V := \{a, b, c, d, e\}$$
$$E := \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$$

Definition: Graph

Ein (schlichter) **Graph** (V, E) besteht aus einer Menge V und einer Menge E von zweielementigen Teilmengen von V.

Die Elemente von V nennt man die **Ecken** und die von E die **Kanten** des Graphen (V, E).

Kleine Graphen kann man gut durch Diagramme angeben.



$$V := \{a, b, c, d, e\}$$
$$E := \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$$

Beachte: Graph und Diagramm sind nicht dasselbe! Ein Graph kann viele Diagramme haben.

Graphen und symmetrische Relationen

Ist (V, E) ein schlichter Graph, dann wird durch

$$(x, y) \in R :\Longleftrightarrow \{x, y\} \in E$$

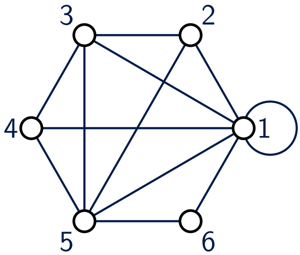
eine symmetrische irreflexive Relation R auf V definiert, und umgekehrt.

Graphen und symmetrische Relationen

Ist (V, E) ein schlichter Graph, dann wird durch

$$(x, y) \in R :\iff \{x, y\} \in E$$

eine symmetrische irreflexive Relation R auf V definiert, und umgekehrt.



Das Diagramm zeigt die „ist teilerfremd zu"–Relation auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Diese Relation ist nicht irreflexiv, der Graph ist deshalb nicht schlicht, sondern enthält eine Schlinge.

Tischtennis-Doppel-Turnier

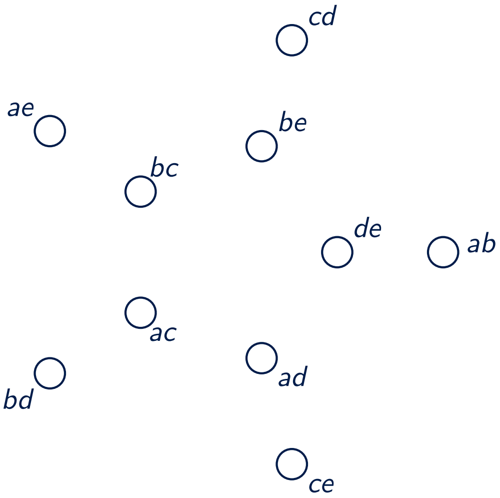
Der Graph, den man beim Tischtennis-Doppel-Turnier betrachtet, hat als Ecken die zweielementigen Teilmengen der Teilnehmermenge T.

Die Ecken stehen für die Doppel-Teams.

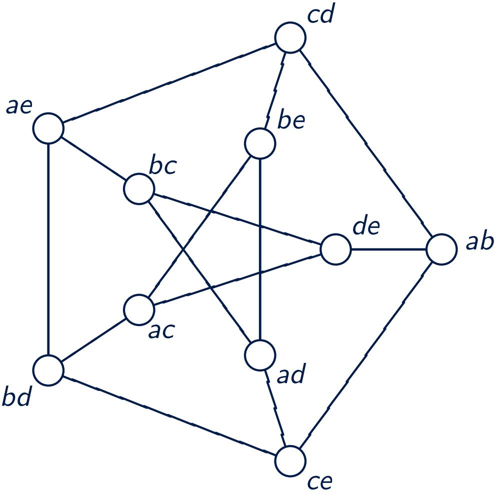
Zwei solche Teams bilden eine Kante, wenn sie keinen Teilnehmer gemeinsam haben. Man hat also

$$\begin{aligned} T &:= \{a, b, c, d, e\} \\ V &:= \{\{x, y\} \mid x, y \in T, x \neq y\} \\ E &:= \{\{\{u, v\}, \{x, y\}\} \mid u, v, x, y \in T, |\{u, v, x, y\}| = 4\}. \end{aligned}$$

Ecken des Petersengraphen



Der Petersengraph



Färbung

Wir hatten folgendes Problem betrachtet:

Ist es möglich, ein Tischtennis-Doppel-Turnier mit fünf Teilnehmern so zu organisieren, dass jedes Team pro Tag nur einmal zusammen spielt und das Turnier nur drei Tage dauert?

Diese Frage kann man so umformulieren:

Ist es möglich, die Kanten des Petersengraphen mit drei Farben so zu färben, dass aneinanderstoßende Kanten verschieden gefärbt sind?

Begriffe der Graphentheorie (1)

Der **Eckengrad** $\deg(a)$ einer Ecke $a \in V$ ist die Anzahl der Kanten aus E, in denen a vorkommt, also

$$\deg(a) := |\{k \in E \mid a \in k\}|.$$

Der Grad ist eine nichtnegative ganze Zahl oder unendlich.

Begriffe der Graphentheorie (2)

Ein **Weg** von einer Ecke a zu einer Ecke b ist eine Folge $a_0, a_1, \ldots, a_n$ von Ecken $a_i \in V$ mit folgenden Eigenschaften

1. $a_0 = a$, $a_n = b$ und $a_i \neq a_j$ für alle $i \neq j$,
2. für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ ist $\{a_i, a_{i+1}\} \in E$.

Man nennt dann n die **Länge** des Weges.

Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Ecken a, b einen Weg von a nach b gibt.

Begriffe der Graphentheorie (3)

Ein **Kreis** in einem Graphen (V, E) ist eine Folge $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0$ von Ecken mit folgenden Eigenschaften:

1. $n > 1$,
2. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ist ein Weg in (V, E),
3. $\{a_n, a_0\} \in E$.

Ein Graph heißt **kreislos**, wenn er keinen Kreis enthält.

Ein Hilfssatz

Hilfssatz: Jeder nichtleere endliche kreislose Graph enthält eine Ecke vom Grad ≤ 1.

Wir beweisen diese Aussage nicht direkt, sondern eine zu ihr logisch offenbar gleichwertige Aussage, ihre **Kontraposition**.

Bewiesen wird

> *Jeder nichtleere endliche Graph ohne Ecken vom Grad ≤ 1 enthält einen Kreis.*

Bäume

Satz: Für jeden nichtleeren endlichen zusammenhängenden Graphen (V, E) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. (V, E) ist kreislos.
2. $|E| = |V| - 1$.

Bemerkung: Einen nichtleeren zusammenhängenden kreislosen Graphen nennt man einen **Baum**. Der Satz besagt, dass die endlichen Bäume genau diejenigen nichtleeren Graphen sind, die zusammenhängend sind und eine Ecke mehr als Kanten haben.

Beweisteil 1 $\Rightarrow$ 2

Gäbe es überhaupt ein Gegenbeispiel zur Behauptung, dann gäbe es auch eines kleinster Eckenzahl. Nennen wir es (V, E). Nach dem Hilfssatz gibt es eine Ecke a vom Grad ≤ 1, und weil (V, E) zusammenhängend und sicher nicht einelementig ist, hat a den Grad 1. Es gibt also genau eine Kante, nennen wir sie k, die a enthält.

Der Graph $(V \setminus \{a\}, E \setminus \{k\})$ ist ebenfalls nichtleer, endlich und zusammenhängend, ist aber, weil er weniger Ecken als (V, E) hat, kein Gegenbeispiel zur Behauptung. Deshalb ist $|E \setminus \{k\}| = |V \setminus \{a\}| - 1$ und folglich auch $|E| = |V| - 1$. Die Annahme, es gäbe ein Gegenbeispiel, ist damit ad absurdum geführt: es kann kein Gegenbeispiel geben.

Beweisteil 2 $\Rightarrow$ 1

Entfernt man aus einem zusammenhängenden Graphen eine Kante, die in einem Kreis liegt, so bleibt der Graph zusammenhängend. Das kann man solange wiederholen, bis man einen kreislosen Graphen erhält.

Die Eckenzahl hat sich nicht geändert, die Kantenzahl ist nach dem, was wir bereits im ersten Beweisteil nachgewiesen haben, um 1 kleiner als die Eckenzahl. Nach der Voraussetzung war sie das aber von Anfang an. Man hat also keine Kante entfernt; der Graph war von vornherein kreisfrei.

Planare Graphen

Ein **ebenes Diagramm** eines Graphen ist ein Diagramm, bei dem sich die die Kanten darstellenden Linien nicht schneiden.

Jedes ebene Diagramm unterteilt die Zeichenebene in **Flächen**. Dazu wird auch die das Diagramm umgebende Außenfläche gerechnet.

Ein Graph heißt **planar**, wenn er ein ebenes Diagramm besitzt.

Die Eulersche Polyederformel

Satz: *Hat ein endlicher, nichtleerer, zusammenhängender planarer Graph e Ecken, k Kanten und ein ebenes Diagramm mit f Flächen, dann gilt*

$$e + f = k + 2.$$

Bäume in der Informatik

In der Informatik verwendet man den mathematischen Begriff des Baumes oft in einer etwas erweiterten Bedeutung. Auch die kann man mathematisch präzisieren, aber darauf verzichten wir hier und geben nur eine anschauliche Beschreibung:

Erstens nimmt man an, dass eine der Ecken des Baumes besonders markiert ist; diese Ecke nennt man die **Wurzel** des Baumes. Einen Baum mit markierter Wurzel nennt man auch einen **Wurzelbaum**. Zweitens wird oft implizit vorausgesetzt, dass die Kanten, die eine feste Ecke enthalten, eine *Reihenfolge* haben.

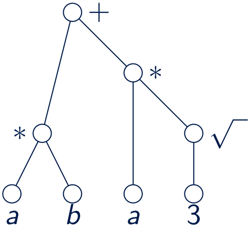
Eine derzeit populäre Methode, solche Bäume aufzuschreiben und zu beschriften, ist `XML`.

Bäume und Terme

Solche geordneten Wurzelbäume verwendet man, um *Terme* zu beschreiben. Den Ausdruck

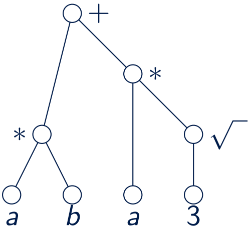
$$a * b + a * \sqrt{3}$$

stellt man z.B. folgendermaßen dar:



Die Wurzel ist in diesem Diagramm *oben*!

Darstellung in XML-ähnlicher Notation




```
<term>
    <label> + </label>
    <term>
        <label> ∗ </label>
        <term>
            <label> a </label>
        </term>
        <term>
            <label> b </label>
        </term>
    </term>
    <term>
        <label> ∗ </label>
        <term>
            <label> a </label>
        </term>
        <term>
            <label> √ </label>
            <term>
                <label> 3 </label>
            </term>
        </term>
    </term>
</term>
```