Vorlesung Diskrete Strukturen
Graphen: Wieviele Bäume?

Bernhard Ganter

WS 2009/10

Isomorphie

Zwei Graphen (V_1, E_1) und (V_2, E_2) heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive, Kanten erhaltende und Kanten reflektierende Abbildung von V_1 nach V_2 gibt. Jede solche Abbildung ist ein **Isomorphismus**.

Dabei heißt eine Abbildung $\varphi : V_1 \to V_2$

Kanten erhaltend, wenn aus $\{u, v\} \in E_1$ stets $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$ folgt, und

Kanten reflektierend, wenn aus $\{u, v\} \notin E_1$ stets $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \notin E_2$ folgt.

Bäume

Wenn im Folgenden von „Bäumen" geredet wird, sind Bäume im Sinne der Graphentheorie gemeint: Ein Baum ist hier also ein zusammenhängender kreisloser Graph.

Bäume sind damit auch genau diejenigen Graphen, in denen je zwei Ecken durch genau einen Weg verbunden sind.

Eine Ecke vom Grad 1 in einem Baum nennt man ein **Blatt**. Einen Baum mit genau zwei Blättern nennt man auch einen **Weg**. Ein Baum, in dem alle Ecken bis auf (höchstens) eine Blätter sind, ist ein **Stern**.

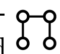
Wieviele Bäume mit 4 Ecken gibt es?

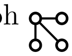
Wenn eine solche Frage wie

„Wieviele Bäume mit 4 Ecken gibt es?"

beantwortet werden soll, muss man zunächst klären, was gemeint ist. Insbesondere muss präzisiert werden, ob die Anzahl „bis auf Isomorphie“ bestimmt werden soll oder nicht (engl.: “unlabeled” vs. “labeled”).

Es gibt, wie man durch Probieren findet, genau 16 verschiedene Bäume mit den vier Ecken $V := \{0, 1, 2, 3\}$. Davon sind zwölf isomorph zum Weg mit vier Ecken und vier isomorph zum Stern.





Bis auf Isomorphie gibt es also genau zwei Bäume mit vier Ecken.

Wieviele Bäume mit n Ecken gibt es?

Es ist mathematisch anspruchsvoll, die Anzahl der Isomorphietypen von Bäumen mit genau n Ecken allgemein zu bestimmen. Die dafür entwickelte **Zähltheorie** nach G. Polya wird in dieser Vorlesung nicht behandelt.

Stattdessen beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 1. *Die Anzahl der Bäume* (V, E) *mit* $V := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ *ist* n^{n-2}.

n	1	2	3	4	5
$t(n)$	1	1	3	16	125

Beweisstrategie

Der Satz besagt, dass es genau so viele Bäume auf $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ gibt wie $n-2$-Tupel mit Komponenten aus $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Ein Beweis kann also geführt werden, indem eine bijektive Abbildung zwischen der Menge aller Bäume auf $\mathbb{Z}_n$ und der Menge $\mathbb{Z}_n^{n-2}$ angegeben wird.

Dazu müssen wir eine Vorschrift angeben, die jedem Baum auf $\mathbb{Z}_n$ auf eindeutige und umkehrbare Weise ein $n-2$-Tupel zuordnet.

Eine bekannte Weise, dies zu tun, liefert der sogenannte **Prüfer-Code**.

Der Prüfer-Code eines Baumes

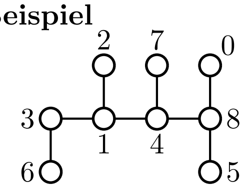
Der Prüfer-Code ordnet (für $n \geq 2$) jedem Baum (V, E) mit linear geordneter n-elementiger Eckenmenge V ein $(n-2)$-Tupel mit Komponenten aus V zu, und zwar wie folgt:

- Falls $n = 2$ ist, wird dem Baum das Nulltupel zugeordnet.
- Falls $n > 2$ ist, sei b das kleinste Blatt des Baums und a_0 die zu b adjazente Ecke.

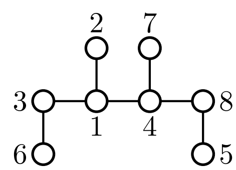
  Dem Baum wird das Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-3})$ zugeordnet, wobei $(a_1, \ldots, a_{n-3})$ der Prüfercode des Baumes ist, der entsteht, wenn man das Blatt b entfernt, also der des Baums

$$(V \setminus \{b\}, E \setminus \{\{b, a_0\}\}).$$

Beispiel



Das kleinste Blatt ist das mit der Nummer 0. Die dazu adjazente Ecke ist 8. Der Prüfer-Code beginnt also mit $(8, \ldots)$.
Für den nächsten Schritt wird das Blatt 0 entfernt.



Nun ist 2 das kleinste Blatt. Die dazu adjazente Ecke ist 1. Der Prüfer-Code beginnt also mit $(8, 1, \ldots)$.
Für den nächsten Schritt wird das Blatt 2 entfernt, usw.

Als Prüfer-Code des oben abgebildeten Baumes erhält man so

$$(8, 1, 8, 3, 1, 4, 4).$$

Die Blätter

Eine Beobachtung, die uns noch nützlich sein wird, notieren wir als Hilfssatz:

Die Blätter des Baumes kommen im Prüfer-Code nicht vor. Das ist aufgrund der Konstruktion recht offensichtlich: Im Tupel werden ja nur Ecken notiert, die zu einem Blatt adjazent sind. Solche Ecken können aber für $n > 2$ keine Blätter sein, und für $n = 2$ werden sie nicht notiert.

Weil aber jede Ecke, die im Prüfer-Code nicht vorkommt, zu nur einer anderen adjazent sein kann, gilt sogar noch mehr:

Hilfssatz 1. *Die Blätter des Baums sind genau diejenigen Ecken, die im Prüfer-Code nicht vorkommen.*

Vom Prüfer-Code zum Baum

Gegeben sei ein $n-2$-Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-3})$ mit Komponenten aus der linear geordneten Menge V.

Wir bestimmen ein $(n-2)$-Tupel $(b_0, \ldots, b_{n-3})$ wie folgt:

- b_0 sei das kleinste Element von $V \setminus \{a_0, \ldots, a_{n-3}\}$.
- b_{i+1} sei das kleinste Element von $V \setminus \{b_0, \ldots b_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-3}\}$, für $i := 0, \ldots, n-4$.

Außerdem sei $e := V \setminus \{b_0, \ldots, b_{n-3}\}$.

Der gesuchte Baum hat dann die Kantenmenge

$$E := \{\{a_0, b_0\}, \ldots, \{a_{n-3}, b_{n-3}\}, e\}.$$

Beispiel

Gegeben sei $V := \{0, 1, \ldots, 8\}$ (also $n = 9$) und

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-3}) := (8, 1, 8, 3, 1, 4, 4).$$

Wir berechnen $(b_0, \ldots, b_{n-3})$ nach der angegebenen Regel:

$(8, 1, 8, 3, 1, 4, 4)$ $(0,$	Die kleinste Zahl, die in $\{a_0, \ldots, a_{n-3}\}$ nicht vorkommt, ist 0. Also $b_0 := 0$.
$(8, 1, 8, 3, 1, 4, 4)$ $(0, 2,$	Die kleinste Zahl, die in $\{b_0, a_1, \ldots, a_{n-3}\}$ nicht vorkommt, ist 2. Also $b_1 := 2$, usw.
$(8, 1, 8, 3, 1, 4, 4)$ $(0, 2, 5, 6, 3, 1, 7)$	Die im vollständigen Tupel $(b_0, \ldots, b_{n-3})$ fehlenden Elemente ergeben $e := \{4, 8\}$.

Ergebnis:

$$E = \{\{0, 8\}, \{1, 2\}, \{5, 8\}, \{3, 6\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{4, 7\}, \{4, 8\}\}.$$

Satz und Beweis

Satz 2. *Es sei V eine linear geordnete n-elementige Menge, $n \geq 2$. Der oben definierte Prüfer-Code ordnet jedem Baum mit Eckenmenge V ein $(n-2)$-Tupel mit Komponenten aus V zu, und jedes solche $(n-2)$-Tupel ist Prüfer-Code genau eines Baumes.*

Den **Beweis** führen wir durch Induktion über n. Für den kleinstmöglichen Fall, $n = 2$, ist die Behauptung offenbar richtig. Nun sei $n > 2$. Der erste Teil der Behauptung ist offensichtlich. Zu beweisen ist deshalb nur noch, dass jedes $(n-2)$-Tupel der Prüfer-Code genau eines Baumes ist.

Sei also $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-3})$ ein solches Tupel und b_0 das kleinste Element der Menge $V \setminus \{a_0, \ldots, a_{n-3}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

Nach der Induktionsannahme ist $(a_1, \ldots, a_{n-3})$ Prüfer-Code genau eines Baumes mit der Eckenmenge $V \setminus \{b_0\}$. Die Blätter dieses Baumes sind genau die Elemente von $V \setminus \{b_0\}$, die nicht im Tupel $(a_1, \ldots, a_{n-3})$ vorkommen, und b_0 ist kleiner als all diese Blätter. Deshalb ist b_0 das kleinste Blatt des Baumes, der entsteht, wenn man die Kante $\{a_0, b_0\}$ hinzufügt. Dieser Baum, und kein anderer, hat also den Prüfer-Code $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-3})$.

□

Noch ein Beispiel als Korollar

Die Bäume mit n Ecken und $n - 1$ Blättern sind genau die Sterne.

Wieviele Bäume gibt es mit n Ecken und genau $n - 2$ Blättern?

Nach dem Hilfssatz sind dies genau so viele, wie es Tupel in $\mathbb{Z}_n^{n-2}$ gibt mit genau zwei verschiedenen Komponenten. Diese Anzahl ist leicht zu bestimmen, sie lautet (für $n > 2$)

$$\binom{n}{2} \cdot (2^{n-2} - 2).$$

Man hat ja $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, die beiden Komponenten zu wählen, und kann aus den beiden genau 2^{n-2} Tupel der Länge $n - 2$ bilden, von denen aber genau zwei konstant sind, also aus nur einer Komponente bestehen.

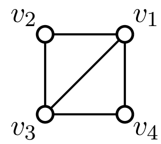
Die Anzahl der Bäume auf $\{0, 1, \ldots, 5\}$ mit genau vier Blättern ist also gleich 210.

Die Adjazenzmatrix

Als **Adjazenzmatrix** eines endlichen Graphen (V, E) mit $V := \{v_1, \ldots, v_n\}$ bezeichnet man die $n \times n$-Matrix

$$A := (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \quad \text{mit} \quad a_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Adjazenzmatrix ist symmetrisch, hat Nullen in der Hauptdiagonale und die Spalten- und Zeilensummen sind gleich dem jeweiligen Eckengrad.



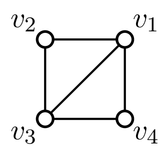
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gradmatrix

Als **Gradmatrix** von (V, E) mit $V := \{v_1, \ldots, v_n\}$ bezeichnen wir die Diagonalmatrix

$$D := (d_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \quad \text{mit} \quad d_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ \deg(v_i) & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

Die Diagonaleinträge der Gradmatrix sind die Eckengrade des Graphen, alle anderen Komponenten sind Null.



$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Der Matrix-Gerüst–Satz

Satz 3. *Sei $G := (V, E)$ ein Graph mit $n > 1$ Ecken, der Adjazenzmatrix A und der Gradmatrix D. Die Matrix $(D-A)_i$ entstehe aus D_A durch Streichen der i-ten Zeile und der i-ten Spalte.*

Dann ist $\det((D - A)_i)$ *die Anzahl $\tau(G)$ der Gerüste im Graphen (G).*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 8.$$

Beweis

Wir führen den Beweis durch Induktion über die Eckenzahl n und über die Zahl m der Kanten bei fester Eckenzahl.

Beweis 1. *Hat der Graph keine Kanten, so ist $D - A$ die Nullmatrix und damit $\det((D-A)_i) = 0$. Der Graph hat keine Gerüste, die Behauptung ist damit erfüllt.*

Hat der Graph $G := (V, E)$ n Ecken und $m > 0$ Kanten, so können wir durch Umnummerieren erreichen, dass $i = 1$ und $e := \{v_1, v_2\}$ eine Kante ist. Nun bezeichne $G \setminus e$ den Graphen $(V, E \setminus \{e\})$, der druch Wegnahme der Kante e einsteht, und G/e den Graphen mit Eckenmenge $\{v_2, \ldots, v_n\}$ und der Kantenmenge

$$(E \setminus \{\{v_1, w\} \mid \{v_1, w\} \in E\} \cup \{\{v_2, w\} \mid \{v_1, w\} \in E \setminus \{\{v_1, v_2\}\}),$$

der entsteht, wenn man die Ecken v_1 und v_2 kontrahiert.

Beweis, Fortsetzung

Beweis 2. *Es gilt*

$$\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G/e),$$

denn $\tau(G \setminus e)$ ist die Anzahl der Gerüste von G, die die Kante e nicht enthalten, und G/e enthält genau so viele Gerüste, wie es Gerüste in G gibt, die e enthalten. Diese beiden Graphen haben weniger Ecken oder gleichviel Ecken und weniger Kanten als G, erfüllen also nach der Induktionsannahme die Behauptung des Satzes.

Wir setzen $d_1 := \deg(v_1)$, $d_2 := \deg(v_2)$ und $d' := d_1 + d_2 - 2$ (dann ist d' der Grad der Ecke v_2 in G/e), und betrachten die Matrizen $(D - A)_1$ für die beiden Graphen $G \setminus e$ und G/e.

Beweis, Fortsetzung

Beweis 3. $\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G/e) =$

$$\det \begin{pmatrix} d_1 - 1 & & \\ & d_2 - 1 & N \\ & N^T & \boxed{M} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} d' & N \\ N^T & \boxed{M} \end{pmatrix}$$

Entwickelt man die erste Determinante nach der ersten Zeile, so erhält man das gleiche Ergebnis wie …

Beweis (Schluss)

Beweis. beim Entwickeln der Matrix $(D - A)_1$ für den Ausgangsgraphen G, denn diese hat folgende Gestalt:

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & -1 & \\ -1 & d_2 & N \\ & N^T & \boxed{M} \end{pmatrix}$$

□