Vorlesung Diskrete Strukturen
Transportnetze

Bernhard Ganter

Institut für Algebra
TU Dresden
D-01062 Dresden
bernhard.ganter@tu-dresden.de

WS 2009/10

Gerichtete Graphen

Ein schlingenloser **gerichteter Graph** ist ein Paar (V, A), wobei

- V eine beliebige Menge ist, deren Elemente wir *Ecken* nennen
- und $A \subseteq \{(v, w) \mid v \neq w \in V\}$ eine Menge von Eckenpaaren ist, die wir **Bögen** nennen.

Ist (v, w) ein Bogen, dann nennen wir w einen **Nachfolger** von v und v einen **Vorgänger** von w.

Eine Ecke $v \in V$ eines gerichteten Graphen (V, A) nennen wir eine **Quelle**, wenn sei keinen Vorgänger hat, und eine **Senke**, wenn sie keinen Nachfolger hat.

Transportnetze

Ein Transportnetz $(V, A, s, q, \mathrm{wt})$ ist ein gerichteter Graph (V, A), in dem es genau eine Quelle gibt, nämlich q, und genau eine Senke, nämlich s, zusammen mit einer positiven Gewichtsfunktion

$$\mathrm{wt} : A \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}.$$

Statt vom „Gewicht“ spricht man bei Transportnetzen gern von der „Kapazität“ eines Bogens.

Fluss

Ein **Fluss** in einem Transportnetz $(V, A, s, q, \mathrm{wt})$ ist eine nichtnegative Kantenbewertung

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit der Eigenschaft, dass für alle Ecken $v \in V \setminus \{q, s\}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{\substack{w \text{ Vorgän-} \\ \text{ger von } v}} f(w, v) = \sum_{\substack{w \text{ Nachfol-} \\ \text{ger von } v}} f(v, w).$$

(„Was in v hineinfließt, fließt auch heraus.“)

Ein Fluss f heißt **zulässig**, wenn $f(v, w) \leq \mathrm{wt}(v, w)$ für alle $(v, w) \in A$ gilt.

Verallgemeinerung der Flusserhaltung

In jedem endlichen Transportnetzwerk gilt die oben formulierte Bedingung nicht nur für einzelne Ecken, sondern für Teilmengen:

Hilfssatz

Ist $T \subseteq V \setminus \{q, s\}$ eine endliche Teilmenge der Eckenmenge eines Transportnetzes, die weder die Quelle noch die Senke enthält, dann gilt

$$\sum_{\substack{(w,v) \in A \\ w \notin T,\, v \in T}} f(w,v) = \sum_{\substack{(v,w) \in A \\ v \in T,\, w \notin T}} f(v,w).$$

Das beweist man durch Induktion über die Mächtigkeit von T.

Die Stärke eines Flusses

Wählt man im Hilfssatz die Menge T maximal, also $T := V \setminus \{q, s\}$, dann ergibt sich

Hilfssatz

$$\sum_{\substack{w \text{ Nachfolger} \\ \text{der Quelle } q}} f(q, w) = \sum_{\substack{w \text{ Vorgänger} \\ \text{der Senke } s}} f(w, s).$$

„Was aus der Quelle herausfließt, fließt in die Senke hinein.“

Man gibt dieser Summe die Abkürzung $\|f\|$ und nennt $\|f\|$ die **Stärke** des Flusses f.

Partitionierung

Man erhält noch folgendes: Partitioniert man die Eckenmenge V in irgendeiner Weise in zwei Mengen M, N, von denen die eine die Quelle und die andere die Senke enthält, also für

$$V = M \,\dot\cup\, N, \quad q \in M, s \in N,$$

dann ergibt sich als Differenz genau die Stärke des Flusses:

$$\|f\| = \sum_{\substack{(v,w) \in A \\ v \in M, w \in N}} f(v,w) - \sum_{\substack{(w,v) \in A \\ v \in M, w \in N}} f(w,v).$$

„Was von M nach N fließt und nicht zurück,
ist genau so viel, wie von der Quelle zur Senke fließt.“

Summen von Flüssen

Summen von Flüssen eines Netzwerkes sind stets wieder Flüsse. Allerdings muss eine Summe zulässiger Flüsse nicht wieder zulässig sein.

Ein Fluss f heißt **eingleisig**, wenn es einen gerichteten Weg von der Quelle zur Senke gibt mit der Eigenschaft, dass f den Wert Null hat für alle Bögen, die nicht zu diesem Weg gehören.

Hilfssatz

Jeder Fluss eines endlichen Transportnetzwerkes lässt sich als Summe eingleisiger Flüsse darstellen.

Schnitt

Ein **Schnitt** in einem Transportnetzwerk $(V, A, q, s, \mathrm{wt})$ ist eine Menge $S \subseteq A$ mit der Eigenschaft, dass es im gerichteten Graphen $(V, A \setminus S)$ keinen gerichteten Weg von q zu s gibt.

Anders formuliert ist ein Schnitt eine Bogenmenge, die aus jedem gerichteten Weg von q nach s mindestens einen Bogen enthält.

Die **Kapazität** eines Schnitts S ist definiert als

$$\mathrm{wt}(S) := \sum_{(v,w)\in S} \mathrm{wt}(v, w).$$

Beobachtung

Hilfssatz

Ist S ein Schnitt des endlichen Transportnetzwerks (V, A, q, s, wt) und f ein zulässiger Fluss, dann gilt

$$\|f\| \leq wt(S).$$

Beweisidee: Der gegebene Fluss f lässt sich als Summe $f = f_1 + \ldots + f_r$ eingleisger Flüsse schreiben. Ein eingleisiger Fluss hat Werte ungleich Null nur auf einem gerichteten Weg von der Quelle zur Senke, er durchläuft also einen Bogen des Schnitts. Wird ein Bogen des Schnitts von mehreren Summandenflüssen durchlaufen, dann müssen sich diese den Bogen „teilen“: Die Summe der Stärken dieser eingleisigen Flüsse darf die Kapazität des Bogens nicht überschreiten. Daraus folgt das Weitere.

Der Schnitt-Fluss–Satz (max flow = min cut)

Satz

Es sei (V, A, q, s, wt) ein endliches Transportnetz. Dann gilt

$$\max_{f \text{ zul. Fluss}} \|f\| = \min_{S \text{ Schnitt}} wt(S).$$

Der stärkste zulässige Fluss ist also genau so stark wie die Kapazität des kleinsten Schnitts.

Zum **Beweis** dieses Satzes geben wir einen Algorithmus an, der zu einem gegebenen Netzwerk einen zulässigen Fluss f und einen Schnitt S der Kapazität $\mathrm{wt}(S) = \|f\|$ konstruiert. Nach dem Hilfssatz muss dieser Fluss maximal stark und der Schnitt von minimaler Kapazität sein. Der Satz ist damit also bewiesen.

Flussverbesserung

Genauer gesagt leistet der Algorithmus bei einem Durchlauf folgendes: Ausgehend von einem zulässigen Fluss im gegebenen Netzwerk konstruiert der Algorithmus einen stärkeren zulässigen Fluss oder einen Schnitt, dessen Kapazität gleich der Stärke des gegebenen Flusses ist.

Sind die auftretenden Gewichte und Flussstärken ganzzahlig, dann ist auch die Verbesserung ganzzahlig. Damit kann man zeigen, dass der Algorithmus irgendwann (nach endlich vielen Durchläufen) den Fluss nicht mehr verbessern kann und deshalb einen minimalen Schnitt gefunden haben muss.

Markierung

Beim Markierungsalgorithmus werden die Ecken des Netzwerkes, ausgehend von der Quelle, nach bestimmten Regeln nacheinander markiert. Erreicht man dabei die Senke, kann der vorliegende Fluss verbessert werden, wenn nicht, wird der gesuchte Schnitt gefunden.

Eine Marke der Markierung ist ein Paar, in dem die jeweilige Vorgängerecke notiert ist sowie die mögliche Flussverbesserung. Zu Beginn, bei der Quelle, gibt es allerdings keine Vorgängerecke und die Verbesserung ist noch potenziell unbegrenzt.

Gegeben sei nun also ein endliches Transportnetz $(V, A, q, s, \mathrm{wt})$ und ein zulässiger Fluss f, z.B. der Fluss $f(v, w) := 0$ für alle $(v, w) \in A$.

Der Markierungsalgorithmus

1. Markiere die Quelle q mit der Marke $(-, \infty)$.
2. Sobald die Senke s markiert wurde, stopp. Solange die Senke nicht markiert ist, wiederhole die Schritte (3) und (4), bis weder (3) noch (4) zu einer weiteren Marke führen.
3. Falls es einen Bogen $(v, w) \in A$ gibt, so dass v markiert, w unmarkiert und $\mathrm{wt}(v, w) - f(v, w) > 0$ ist, markiere w mit der Marke $(v^+, \Delta(w))$, wobei $\Delta(w) := \min\{\Delta(v), \mathrm{wt}(v, w) - f(v, w)\}$.
4. Falls es einen Bogen $(v, w) \in A$ gibt, so dass w markiert, v unmarkiert ist und $f(v, w) > 0$ ist, markiere v mit der Marke $(w^-, \Delta(v))$, wobei $\Delta(v) := \min\{\Delta(w), f(v, w)\}$.

Zum Verständnis

Es wird von der Quelle aus versucht, den gegebenen Fluss zu verstärken. Die markierten Ecken sind solche, bis zu denen eine Flussverbesserung schon gefunden wurde.

Schritt (3) treibt diese Verbesserung nach Möglichkeit noch weiter, „vorwärts“ längs eines nicht ausgelasteten Bogens.

Schritt (4) untersucht, ob es Bögen gibt, bei denen der Fluss „in die falsche Richtung“, d.h. von einer nicht markierten Ecke zu einer markierten fließt, und vermindert nach Möglichkeit solchen Rückfluss.

Es kommt nicht auf die Reihenfolge der Schritte (3) und (4) an.

Die invariante Bedingung

Hilfssatz

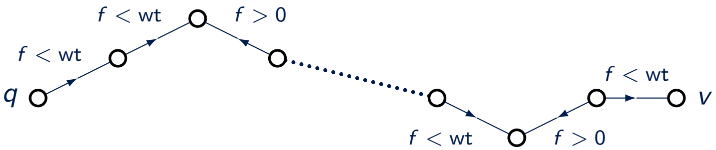
Wenn beim Markierungsalgorithmus eine Ecke v *mit* $\Delta(v)$ *markiert wurde, dann gibt es eine Folge* $(q = v_0, \ldots, v_r = v)$ *von Ecken mit der Eigenschaft, dass für alle* $i \in \{0, \ldots r-1\}$ *einer der beiden folgenden Fälle eintritt:*

1. v_{i+1} *ist mit* $(v_i^+, \Delta(v_{i+1}))$ *markiert und der Fluss durch den Bogen* (v_i, v_{i+1}) *ist um mindestens* $\Delta(v)$ *kleiner als die Kapazität dieses Bogens, oder*
2. v_i *ist mit* $(v_{i+1}^-, \Delta(v_i))$ *markiert und der Fluss durch den Bogen* (v_{i+1}, v_i) *ist mindestens* $\Delta(v)$.

Dies beweist man per Induktion über die Anzahl der Schritte im Algorithmus.

Was der Hilfssatz bedeutet

In Worten: Wenn v markiert ist, dann gibt einen *ungerichteten* Weg von der Quelle zu v, längs dem der Fluss um $\Delta(v)$ verbessert werden kann: Die Vorwärtskanten haben noch freie Kapazität und der Fluss kann erhöht werden, bei den Rückwärtskanten wird der Fluss entsprechend erniedrigt.



Die Erhaltungsbedingung ist allerdings für den verbesserten Fluss bei der Ecke v nicht gewährleistet.

Falls der Markierungsalgorithmus die Senke erreicht

Falls die Senke s erreicht wird, gibt es eine Folge

$$(q = v_0, \ldots, v_r = s)$$

mit den im Hilfssatz angegebenen Eigenschaften. Definiert man nun eine Abbildung $f^+ : A \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f^+(x,y) := \begin{cases} f(x,y) + \Delta(s) & \text{falls } (x,y) = (v_i, v_{i+1}) \\ & \text{für ein } i \in \{0, \ldots, r-1\} \text{ und} \\ & \text{Fall (1) des Hilfssatzes eintritt,} \\ & \\ f(x,y) - \Delta(s) & \text{falls } (x,y) = (v_{i+1}, v_i) \\ & \text{für ein } i \in \{0, \ldots, r-1\} \text{ und} \\ & \text{Fall (2) des Hilfssatzes eintritt,} \\ & \\ f(x,y) & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist f^+ ein zulässiger Fluss und $\|f^+\| = \|f\| + \Delta(s)$.

Falls der Markierungsalgorithmus die Senke nicht erreicht

Wenn der Markierungsalgorithmus die Senke nicht erreicht, dann beginnt jeder gerichtete Weg von der Quelle zur Senke mit einer markierten Ecke (nämlich q) und endet mit einer unmarkierten (nämlich s). Deshalb enthält jeder solche Weg einen Bogen, der von einer markierte Ecke zu einer unmarkierten führt. Die Menge

$$S := \{(v, w) \in A \mid v \text{ markiert }, w \text{ unmarkiert } \}$$

ist deshalb ein Schnitt.

Sei nun M die Menge der markierten Ecken und N die Menge der nicht markierten. Wir untersuchen im Einzelnen, wie sich der Fluss auf diesen Bogen verhält.

Die Bögen von M nach N

Die Bögen, die von M nach N führen, als0 von einer markierten zu einer unmarkierten Ecke, bilden genau den Schnitt S. Ist (v, w) eine solcher Bogen, dann muss, weil Schritt (3) des Markierungsalgorithmus nicht ausgeführt werden konnte, $\mathrm{wt}(v, w) = f(v, w)$ sein. Daraus erhalten wir

$$\mathrm{wt}(S) = \sum_{(v,w)\in S} f(v, w).$$

Der Schnitt S ist also voll ausgelastet. Aber Vorsicht: Das bedeutet nicht zwingend, dass der Schnitt minimal ist! Dazu müssen wir noch weiter argumentieren.

Die Bögen von N nach M

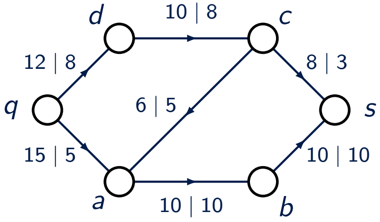
Die Bögen (v, w), die von $v \in N$ nach $w \in M$ führen, also von unmarkierten zu markierten Ecken, werden vom Schritt (4) des Markierungsalgorithmus angesprochen. Der Algorithmus stoppt nur, wenn all diese Bögen den Fluss $f(v, w) = 0$ haben. Führt man die Gleichung von der vorigen Folie mit den Überlegungen von Folie 7 zusammen, erhält man

$$
\begin{aligned}
\mathrm{wt}(S) &= \sum_{(v,w)\in S} f(v,w) - 0 \\
&= \sum_{\substack{(v,w)\in A \\ v\in M,\, w\in N}} f(v,w) - \sum_{\substack{(w,v)\in A \\ v\in M,\, w\in N}} f(w,v) \\
&= \|f\|.
\end{aligned}
$$

Die Kapazität dieses Schnitts ist die Stärke des Flusses f! $\square$.

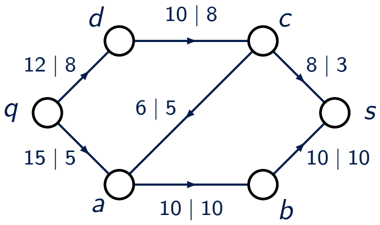
Beispiel (1)

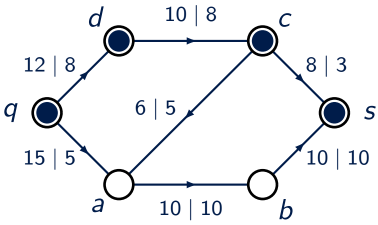
Die Graphik zeigt ein sehr einfaches Transportnetzwerk mit einem zulässigen Fluss f der Stärke $\|f\| = 13$. Die Bögen (v, w) sind in der Form $\mathrm{wt}(v, w) \mid f(v, w)$ beschriftet, also mit „Gewicht | Fluss“.



Beispiel (1)

Die Graphik zeigt ein sehr einfaches Transportnetzwerk mit einem zulässigen Fluss f der Stärke $\|f\| = 13$. Die Bögen (v, w) sind in der Form $\mathrm{wt}(v, w) \mid f(v, w)$ beschriftet, also mit „Gewicht | Fluss“.

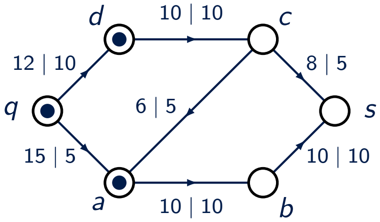




Im ersten Lauf markiert der Algorithmus z.B. einen Weg von der Quelle zur Senke, längs dem der Fluss um 2 verbessert werden kann.

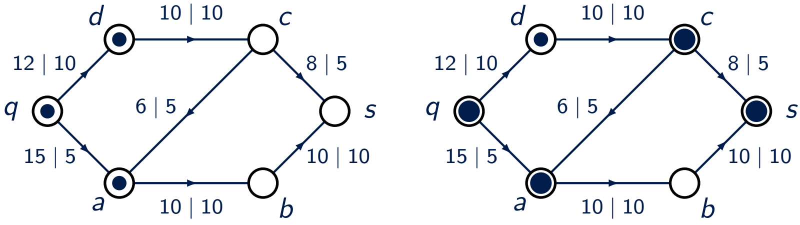
Beispiel (2)

Wendet man den Algorithmus auf den verbesserten Fluss an und verwendet zunächst nur Schritt (3), dann werden die Ecken q, a und d markiert.



Beispiel (2)

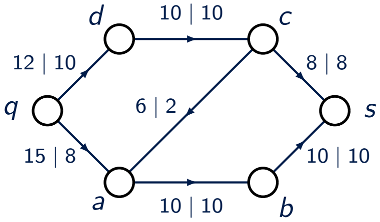
Wendet man den Algorithmus auf den verbesserten Fluss an und verwendet zunächst nur Schritt (3), dann werden die Ecken q, a und d markiert.



Anwenden von Schritt (4) des Algorithmus auf den Bogen (c, a) führt schließlich zur Markierung der Senke und zu einem ungerichteten Weg (q, a, c, s), längs dem der Fluss um 3 verbessert werden kann.

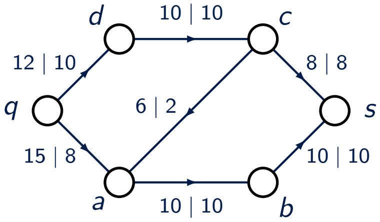
Beispiel (3)

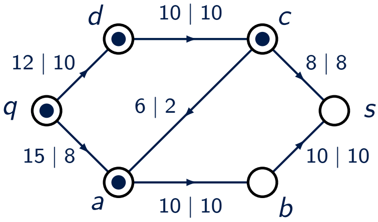
Der verbesserte Fluss hat nun die Stärke 18. Er ist optimal, denn erneutes Anwenden des Markierungsalgorithmus erreicht die Senke nicht.



Beispiel (3)

Der verbesserte Fluss hat nun die Stärke 18. Er ist optimal, denn erneutes Anwenden des Markierungsalgorithmus erreicht die Senke nicht.





Die Bögen von markierten zu unmarkierten Ecken bilden den Schnitts $S := \{(a, b), (c, s)\}$, dessen Kapazität gleich 18, also gleich der Stärke des Flusses und damit minimal ist.