Vorlesung zu Weihnachten

Bernhard Ganter

Institut für Algebra
TU Dresden
D-01062 Dresden

18. Dezember 2009

Eine traditionelle Mathematikaufgabe

Vom keltischen Schreiber Goodeluvd (Jütland, 4. Jhdt.) ist folgende Aufgabe überliefert:

> *In deiner Scheuer hast du einen Hund, zwei Rinder, drei Katzen, vier Puten und fünf Hühner. Der Hund hat sieben Flöhe, die Rinder zwei Kälber, jede Katze vier Läuse, und die Hühner zehn Kücken.*
> *Wieviele sind es?*

Eine traditionelle Mathematikaufgabe

Vom keltischen Schreiber Goodeluvd (Jütland, 4. Jhdt.) ist folgende Aufgabe überliefert:

> *In deiner Scheuer hast du einen Hund, zwei Rinder, drei Katzen, vier Puten und fünf Hühner. Der Hund hat sieben Flöhe, die Rinder zwei Kälber, jede Katze vier Läuse, und die Hühner zehn Kücken.*
> *Wieviele sind es?*

Lösung: $1 + 1 \cdot 7 + 2 + 2 \cdot 2 + 3 + 3 \cdot 4 + 4 + 5 + 5 \cdot 10 = 88.$

Eine traditionelle Mathematikaufgabe

Vom keltischen Schreiber Goodeluvd (Jütland, 4. Jhdt.) ist folgende Aufgabe überliefert:

> *In deiner Scheuer hast du einen Hund, zwei Rinder, drei Katzen, vier Puten und fünf Hühner. Der Hund hat sieben Flöhe, die Rinder zwei Kälber, jede Katze vier Läuse, und die Hühner zehn Kücken.*
> *Wieviele sind es?*

Lösung: $1 + 1 \cdot 7 + 2 + 2 \cdot 2 + 3 + 3 \cdot 4 + 4 + 5 + 5 \cdot 10 = 88.$

Fehler?

Lösung

Die Rechnung ist richtig.

Lösung

Die Rechnung ist richtig.

Aber alles andere ist falsch:

Lösung

Die Rechnung ist richtig.

Aber alles andere ist falsch:

- Dänemark gehörte nie zum keltischen Siedlungsgebiet,

Lösung

Die Rechnung ist richtig.

Aber alles andere ist falsch:

- Dänemark gehörte nie zum keltischen Siedlungsgebiet,
- schon gar nicht im 4. Jahrhundert,

Lösung

Die Rechnung ist richtig.

Aber alles andere ist falsch:

- Dänemark gehörte nie zum keltischen Siedlungsgebiet,
- schon gar nicht im 4. Jahrhundert,
- zu der Zeit gab es noch keine Hauskatzen,

Lösung

Die Rechnung ist richtig.

Aber alles andere ist falsch:

- Dänemark gehörte nie zum keltischen Siedlungsgebiet,
- schon gar nicht im 4. Jahrhundert,
- zu der Zeit gab es noch keine Hauskatzen,
- und Truthühner nur in Amerika.

Lösung

Die Rechnung ist richtig.

Aber alles andere ist falsch:

- Dänemark gehörte nie zum keltischen Siedlungsgebiet,
- schon gar nicht im 4. Jahrhundert,
- zu der Zeit gab es noch keine Hauskatzen,
- und Truthühner nur in Amerika.
- Goodeluvd ist kein keltischer Schreiber, sondern

Lösung

Die Rechnung ist richtig.

Aber alles andere ist falsch:

- Dänemark gehörte nie zum keltischen Siedlungsgebiet,
- schon gar nicht im 4. Jahrhundert,
- zu der Zeit gab es noch keine Hauskatzen,
- und Truthühner nur in Amerika.
- Goodeluvd ist kein keltischer Schreiber, sondern eine Dunstabzugshaube von Ikea.

Halbwegs konvexe Mengen

Eine geometrische Figur $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **konvex**, wenn für je zwei Punkte $p, q \in P$ auch $[p, q] \subseteq P$ gilt.

Als **konvexe Hülle** $\mathrm{conv}(P)$ wird die kleinste konvexe Menge bezeichnet, die P enthält.

Als **Konvexitätsdichte** einer messbaren Menge P bezeichnet man den Quotienten

$$\frac{\mathrm{vol}(P)}{\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(P))}.$$

Mengen mit Konvexitätsdichte > 0.5 sind **halbwegs konvex**.

Definition Weihnachtsplätzchen

Definition

Unter einem **Plätzchen** versteht man ein Stück süßen Kleingebäcks von fester geometrischer Form, die folgenden Bedingungen genügt:

- zusammenhängend, höchstens dreidimensional,
- halbwegs konvex,
- Volumen zwischen 1 und 5 cm^3.

Als **Weihnachtsplätzchen**[a] bezeichnet man Plätzchen, die eigens für die Weihnachtszeit (1.8.–31.3.) hergestellt werden und außerhalb dieser Zeit irgendwie doof aussehen.

[a] Bis Ende 2009 auch: "Weihnachts Plätzchen"

Abgrenzung und verwandte Begriffe

Keine Plätzchen im Sinne der Definition sind z.B.

- Gummibärchen
- Dominosteine
- Spekulatius
- Exzellenzcluster.

Man nennt

- nicht süße Plätzchen: **Kräcker**
- Plätzchen unter 1 cm^3: **Krümel**
- Plätzchen über 5 cm^3: **Kaffestückchen** oder **Pizza**.

Standardisierung

Wegen der großen Vielfalt möglicher Formen verwendet man bei wissenschaftlichen Untersuchungen **Standardplätzchen**, die quadratisch, 5cm^2 gross, 5 mm hoch und jeweils 5 Gramm schwer sind. Gut geeignet dafür wären eigentlich *Basler Läckerli*, allerdings sind diese zu teuer.

Mit Hilfe geeichter Tafelwerke kann man die Standardplätzchen in andere Plätzchen und sogar in beliebige Süßigkeiten umrechnen.

Genormte Umrechnungstabelle

Metrische Plätzchenäquivalentskala		
1 Plätzchen	=	1 Standardplätzchen
1 Marmeladenbrötchen	=	6 Standardplätzchen
1 Tafel Schokolade (100g)	=	16 Standardplätzchen
1,5 kg Dresdner Stollen	=	200 Standardplätzchen
1 Spreewaldgurke (groß)	=	2 Standardplätzchen
1 Spreewaldgurke (Süßstoff)	=	-2 Standardplätzchen
1 Vorlesung Mathe. I f. Informatiker	=	50 Standardplätzchen
3 Quarkkäulchen	=	20 Standardplätzchen
1 Dose Red Bull	=	30 Standardplätzchen
...	=	...

Algebraische Grundlagen

Motivation:

- Weihnachtsplätzchenherstellung gehört zu den frühesten kindlichen Erfahrungen von **Parallelverarbeitung**
- und ist sehr positiv besetzt.
- Einfache Theorieelemente ergeben einen guten Shareholder Value und massig Return on Investment.
- Die Methodik lässt sich problemlos auf andere Einsatzfelder übertragen.

Beispiel

Wir betrachten ein populäres Rezept für **Vanillekipferln**[1]:

50g Mandeln, 50g Haselnüsse[2], 280g Mehl, 70g Zucker, 1 Prise Salz, 200g Butter, 2 Eigelb[3], 5 Päckchen Vanillezucker, 1/2 Tasse Puderzucker[4].

Ein solches Rezept lässt sich leicht in vektorieller Schreibweise formulieren.

[1] Bis Ende 2009 auch Vanille Kipferln
[2] Bis Ende 2009 auch Hasel Nüsse
[3] Bis Ende 2009 auch Ei gelb
[4] Bis Ende 2009 auch Puder Zucker

Vektorschreibweise

Vanillekipferln =

$$(50g, 50g, \ldots, 1/2\text{Tasse}) \cdot \begin{pmatrix} \text{Mandeln} \\ \text{Haselnüsse} \\ \vdots \\ \text{Puderzucker} \end{pmatrix}$$

Da bei den meisten Plätzchenrezepten die gleichen Zutaten verwendet werden, allerdings in unterschiedlichen Mengen, kann diese Schreibweise mehrere Rezepte zusammmenfassen.

Ein Weihnachtsteller

$$\begin{pmatrix} \text{Vanillekipferln} \\ \text{Dattelmakronen} \\ \text{Leipzger Lerchen} \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \text{Zimtsterne} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \text{Mischmaschmatrix} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ U \\ T \\ A \\ T \\ E \\ N \end{pmatrix}.$$

Der Rang der Matrix

- Die Mischmaschmatrix ist nicht invertierbar. Das ist inhaltlich klar, wie soll das gehen? Man müsste ja einen Plätzchenteller in Eier, Mehl, usw. zerlegen können.
- Hinzu kommt, dass man ihre Komponenten sowieso nicht genau kennt, das macht ja jede Oma anders.
- Durch skrupellose Manipulation der Parameter kann man den Rang der Matrix auf 3 drücken (sog. *Industriestandard*).
- Das erlaubt, die $m \times n$-Mischmaschmatrix als Produkt
  - einer $m \times 3$-Matrix (**“Creativity”**)
  - und einer $3 \times n$-Matrix (**“Convenience”**)

  zu schreiben.

Zerlegung

Man erhält so

$$\left(\begin{array}{c} \\ \text{Mischmasch} \\ m \times n \\ \\ \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \\ \text{Creativity} \\ m \times 3 \\ \\ \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \\ \text{Convenience} \\ 3 \times n \\ \\ \end{array}\right)$$

„Convenience" ist eher dem industriellen Bereich zuzuordnen, der Endverbraucher kann sich auf „Creativity" konzentrieren.

Faktor 2

Dabei ist

$$\begin{pmatrix} \text{Backmischung 1} \\ \text{Backmischung 2} \\ \text{Backmischung 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \quad \text{Convenience} \quad \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ U \\ T \\ A \\ T \\ E \\ N \end{pmatrix}.$$

und

Faktor 1

$$\begin{pmatrix} \text{Vanillekipferln} \\ \text{Dattelmakronen} \\ \text{Leipzger Lerchen} \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{Zimtsterne} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \text{Creativity} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Backmischung 1} \\ \text{Backmischung 2} \\ \text{Backmischung 3} \end{pmatrix}$$

Universalität

Bemerkenswert ist die Verallgemeinerbarkeit dieses Verfahrens. Man kann beispielsweise auch setzen

$$\begin{pmatrix} \text{Currywurst} \\ \text{Buletten} \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \text{Katzenfutter} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \text{Creativity} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Schweinemett} \\ \text{Rinderpansen} \\ \text{Gammelfleisch} \end{pmatrix}$$

Ausblick

In der Fortführung der Theorie ist der nächste Schritt die

Trennung des sensorischen Erlebnisses von den Zutaten.

Man kommt dann mit Standardplätzchen aus, die die jeweils gewünschte Geschmackstextur eigenständig annehmen.

Der Weg dorthin verläuft über die sogenannte **Nikolaustransformation**, bei der jedem Plätzchen zunächst ein **Plätzchenpolynom** zugeordnet wird.

Der Theorieaufwand ist erheblich ("Zimtsternpolynome sind irreduzibel") und ist Gegenstand einer Spezialvorlesung.