TU Dresden *01. August 2005*
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. Ch. Grossmann/Dr. R. Vanselow

Klausur Mathematik II für Fakultät MW und Studiengang Mechatronik

Name: ________________________ **Vorname:** ___________________________

Matrikel-Nr.: _________________ **Studiengang:** _______________ **IJ:** _________

Aufgaben Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
Punkte max.	**10**	**9**	**8**	**14**	**13**	**54**
Punkte ist						

Die Lösungswege müssen deutlich erkennbar und in übersichtlicher Form notiert sein. Fehlende Zwischenschritte können nicht bewertet werden. Zu bestimmende Werte sind stets nur soweit zu ermitteln, wie das ohne Taschenrechner einfach möglich ist.

1. (a) Man bestimme die Lösung der Aufgabe

$$f(x,y) := 10x + 4y \to \text{ min!} \qquad \text{bei} \quad 4x^2 + 2xy + y^2 = 7 \tag{1}$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel. Man entscheide mit Hilfe der hinreichenden Bedingungen, welcher der Punkte optimal für (1) ist?

(b) Man löse die Optimierungsaufgabe

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \text{ min!} \qquad \text{bei} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x} = 1 \tag{2}$$

für einen allgemeinen Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ und eine symmetrische, positiv definite (n,n)-Matrix $\mathbf{A}$ mit der für (a) vorgegebenen Vorgehensweise. Dabei ist hervorzuheben, wofür die Voraussetzungen an $\mathbf{c}$ und $\mathbf{A}$ wichtig sind.

2. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten bestimme man das Trägheitsmoment J_z bezüglich der z-Achse des Körpers

$$Q := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq \frac{1}{3}(x^2 + y^2) \right\}$$

mit der Dichte $\rho(x,y,z) \equiv 1$. Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen ist zunächst der Schnitt von Q mit der (x,z)-Ebene zu skizzieren.

3. Man bestimme das Linienintegral

$$I = \oint_{\mathcal{C}} x\,(1-z)\,dx \;+\; (y+z)\,dy \;+\; (y-z^2)\,dz$$

mit Hilfe des Stokesschen Satzes. Dabei bezeichnet $\mathcal{C}$ den geschlossenen Polygonzug im Raum, der nacheinander die Punkte $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ verbindet.

Für Fernstudenten: Linienintegral ohne Stokesschen Satz berechnen.

4. Man bestimme die Lösung $u = u(r,\varphi)$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right)(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}(r,\varphi) &= 0 && r \in (1,R), \quad \varphi \in (0,\pi/2),\\
\frac{\partial u}{\partial \varphi}(r,0) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r,\tfrac{\pi}{2}) &= 0 && r \in (1,R),\\
u(1,\varphi) &= 2+\cos(4\varphi) && \varphi \in [0,\pi/2]\\
\frac{\partial u}{\partial r}(R,\varphi) &= 0 && \varphi \in [0,\pi/2].
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $R > 1$ eine Konstante.
Hinweis: Die bei der Separation auftretende Differentialgleichung $-\Phi'' = \lambda\,\Phi$ ist nur für $\lambda \geq 0$ zu untersuchen.

5. (a) Gegeben ist eine Funktion

$$f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{-1/2} + b & \text{für } t \in (0,1)\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Für $b = 0$, $a = 1/2$ und mit dem obigen f als Dichte einer Zufallsgröße X berechne man deren Verteilungsfunktion, den Erwartungswert sowie $P(X < \frac{3}{4})$. Für welche x_0 gilt $P(X < x_0) = 0.1$?

(ii) Man bestimme alle a, $b \in \mathbb{R}$, für die f Dichte einer Zufallsgröße ist ?

(b) Die Realisierungen $\{z_1, z_2, ..., z_{20}\}$ einer normalverteilten Zufallsgröße Z lieferten

$$\sum_{j=1}^{20} z_j = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{20} (z_j)^2 = 3.8\,.$$

Berechnen Sie daraus für den Erwartungswert μ und die Streuung σ^2 der Zufallsgröße Z jeweils zweiseitige Konfidenzintervalle zum Niveau $1-\alpha = 0.9$.