Institut für Mathematische Stochastik
Dr. D. Hudak

Mathematik 3 für Wirtschaftsingenieure
Probeklausur

1. Gegeben sei die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2\,\mathrm{i})^n}{n \cdot 3^n}$. Für die folgenden Werte von z gebe man jeweils an, ob die gegebene Reihe an diesen Stellen absolut konvergent, bedingt konvergent bzw. divergent ist:
a) $z = 2\,\mathrm{i}$ b) $z = -2\,\mathrm{i}$ c) $z = 1+\mathrm{i}$ d) $z = 3-2\,\mathrm{i}$ e) $z = -3-2\,\mathrm{i}$
(4 Punkte)

2. Im Raum $\mathbb{R}^4$ seien folgende Vektoren gegeben

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ linear unabhängig sind.
(b) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ der orthogonal zu $\operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ ist.
(c) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ und $\langle \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$.
(d) Berechnen Sie die Projektion $\mathbf{p}$ von $\mathbf{a}_1$ in $\operatorname{span}\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

(6 Punkte)

3. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$.

a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f.
b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $A_0, A_1, \ldots A_4, B_1, \ldots, B_4$ für diese Funktion.
c) Welchen Wert nimmt die Fourierreihe von f an der Stelle $x = 0$ an?

(7 Punkte)

4. Berechnen Sie das Doppelintegral $\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=x}^{1} (1-y^2)^5 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

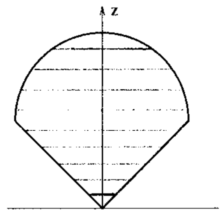
Hinweis: Integrationsreihenfolge vertauschen!

(5 Punkte)

5. Der Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 4\}$ habe die Massendichte $\varrho = \varrho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+1$. Berechnen Sie die Gesamtmasse des Zylinders.

(6 Punkte)

6. Der Körper K sei der Schnitt des Kegels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z\}$ mit der Kugel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4\ \}$. Der Querschnitt von K ist in nebenstehender Zeichnung schraffiert dargestellt. Stellen Sie K als Normalbereich dar
a) in kartesischen Koordinaten,
b) in Zylinderkoordinaten.



(6 Punkte)

7. Gegeben sei die Differentialgleichung $y' + \dfrac{y}{\sqrt{x}} = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $y = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(7 Punkte)

8. Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = x^2 + (y-1)^2$.

(a) Zeichnen Sie die Isoklinen $y' = C$ für $C = 0, \frac{1}{4}, 1, 4$ und skizzieren Sie auf diesen Isoklinen das Richtungsfeld.

(b) Skizzieren Sie die Lösungskurve des Anfangswertproblems

$$y' = x^2 + (y-1)^2,\ y(0) = 1$$

(Lösung der Differentialgleichung nicht erforderlich).

(6 Punkte)

9. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$(2y - 3x^2 - 1)y' = 6xy\,,\ y(1) = 4$$

Die Lösung ist in expliziter Form $y = f(x)$ anzugeben!

(7 Punkte)

10. Gegeben sei eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung sei

$$y_h = C_1 + C_2x + C_3x^2 + (C_4 + C_5x)\mathrm{e}^x + C_6\sin(2x) + C_7\cos(2x)\,.$$

Geben Sie einen Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p an, falls für die Störfunktion $r(x)$ gilt

a) $r(x) = (1+x)(1-x)$ b) $r(x) = 2x\mathrm{e}^{2x}$ c) $r(x) = 2\sin(2x) + 3\cos(3x)$

(6 Punkte)