

Mathematik 3 für Wirtschaftsingenieure

7. Übung (24.01. und 31.01.12)

1. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y' = 2xy$

(b) $y' - y = 1$

(c) $(1 + e^x)yy' = e^x, y(1) = 1$

(d) $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$

2. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0, \quad x > 0.$$

a) Welche der folgenden Funktionen lösen die Differentialgleichung?

(i) $y(x) = x^2$ (ii) $y(x) = x$ (iii) $y(x) = e^x$

(iv) $y(x) = \frac{1}{x}$ (v) $y(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an !

3. Lösen Sie die folgenden exakten Differentialgleichungen:

(a) $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0, y(1) = 1$

(b) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^2)dy = 0$

(c) $4xe^{2x+y}dx + (2x - 1)e^{2x+y}dy = 0$

(d) $\left(\frac{1}{x^2} - y\right) + (y - x)y' = 0, y(1) = -1$

4* Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz ist die Geschwindigkeit der Abkühlung eines Körpers proportional der Temperaturdifferenz gegenüber dem Medium.

Die Anfangstemperatur sei $T_0 = 100^\circ C$. Nach einer Zeit von $t_1 = 10 \text{ min}$ hat sich der Körper in Luft mit der konstanten Temperatur $T_L = 20^\circ C$ auf $T_1 = 60^\circ C$ abgekühlt. Nach welcher Zeit t_2 hat der Körper die Temperatur $T_2 = 25^\circ C$ erreicht?

5. Lösen Sie folgende linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung:

a) $y = x(1 - x)y' + x^2 + 1, y(2) = 5,$

b) $xy' + (y + 1) \ln x = 0, y(1) = -1,$

c) $y' - xy = 2x, y(0) = 2,$

d) $(x^2 + 2)y' + xy - x(x^2 + 2) = 0,$

e) $xy' + y = x \sin x,$

f) $y' = y \tan x + 1.$

6. Lösen Sie folgende linearen Differentialgleichungen:

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$,

b) $y''' - y'' - 2y' = 0$,

c) $y''' - y' = -2x$,

d) $y''' + 2y'' + y' = 2 \sin x$,

e) $y^{(4)} - 16y = 1 - 2x$,

f) $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \sin(3x)$,

g) $y'' + 2y' + 5y = 5x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

7. Von der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(5)} + a_4 y^{(4)} + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

sei folgende Lösung bekannt: $y(x) = 2x + e^x - \sin x$

a) Bestimmen Sie a_0, a_1, \dots, a_4 .

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

8. Gegeben sei die Menge aller Parabeln $y = Cx^2$, $C \in \mathbf{R}$.

a) Bestimmen Sie diejenige Differentialgleichung, deren Lösungsmenge die gegebene Parabelschar ist.

b) Wie lautet die Differentialgleichung der Kurven, die die gegebenen Parabeln in jedem Punkt rechtwinklig schneiden.

c) Lösen Sie diese Differentialgleichung.