10 Einführung in Gewöhnliche Differentialgleichungen

10.1 Beispiele und Grundbegiffe

Beispiel 10.1.1. 1. Der Ort x (Höhe über Boden!) für einen Fallschirmspringer (*Weg-Zeit-Gesetz*) ist eine Funktion der Zeit, $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}$, $T > 0$, und erfüllt unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes eine Gleichung

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) = mg \qquad (t \in [0,T])$$

mit der Masse m des Springers, dem Luftwiderstand r und der Erdbeschleunigung g, sowie den Anfangsbedingungen

$$x(0) = h\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,.$$

Hierbei ist

$$\dot{x}(t) := \qquad\qquad , \quad \ddot{x}(t) :=$$

2. Die Durchbiegung w eines belasteten Balkens (*Biegelinie*) der Länge ℓ aufgrund einer ortsabhängigen, äußeren Kraft $a\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}$, ist eine Funktion $w\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}$ des Ortes und genügt einer Gleichung

$$(p(x)w''(x))'' - (q(x)w'(x))' + r(x)w(x) = a(x) \qquad (x \in [0,\ell])\,,$$

wobei p, q, r gewisse Materialfunktionen sind. Hierbei ist

$$w'(x) := \qquad\qquad , \quad w''(x) :=$$

und allgemein

$$w^{(k)}(x) := \qquad\qquad .$$

Bemerkung 10.1.2. In allen oben angeführten Beispielen ist in jeweils eine Funktion gesucht, welche einer Gleichung und eventuellen Zusatzbedingungen genügen soll.

Wir müssen zwischen der abstrakten Beschreibung einer Differentialgleichung und der Gleichung für die Lösung unterscheiden.

Wir betrachten hier nur explizite gewöhnliche Differentialgleichungen:

Definition 10.1.3. Eine **(explizite) gewöhnliche Differentialgleichung** ist eine Gleichung

(10.1.1)

mit einer Funktion

$$f\colon D(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \cdot m} \to \mathbb{R}^m .$$

Unter einer **Lösung** $y\colon D(y) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ der Differentialgleichung (10.1.1) verstehen wir eine Funktion y, deren Definitionsbereich $D(y)$ ein Intervall positiver Länge ist, die auf $D(y)$ n-mal differenzierbar ist, und für die

für alle $x \in D(y)$

und

für alle $x \in D(y)$ (10.1.2)

gelten. Die Zahl n heißt **Ordnung**, die Zahl m **Dimension** der Differentialgleichung.

Bemerkung 10.1.4. 1.

2.

3. Gesucht sind vielfach die Gesamtheit aller Lösungen einer Differentialgleichung, das heißt die so genannte **allgemeine Lösung**, oder spezielle Lösungen welche zusätzliche Anfangs- oder Randbedingungen erfüllen.

4. Wenn $m > 1$, so heißt (10.1.1) auch **Differentialgleichungssystem**.

5. Explizite Differentialgleichungen n-ter Ordnung der Dimension m, können, wie wir später sehen werden, stets auf auf Differentialgleichungssysteme erster Ordung der Dimension $n \cdot m$ zurückgeführt werden.

Beispiel 10.1.5. 1. Sind p und q zweimal bzw. einmal differenzierbar auf einem Intervall I und genügt die viermal differenzierbare Funktion $w\colon I \to \mathbb{R}$ der Gleichung

$$(p(x)w''(x))'' - (q(x)w'(x))' + r(x)w(x) = a(x) \quad \text{für alle } x \in I ,$$

so ergibt sich

$$p''(x)w''(x) + 2p'(x)w'''(x) + p(x)w^{(4)}(x) - q'(x)w'(x) - q(x)w''(x) + r(x)w(x) = a(x)$$

für alle $x \in I$. Sei nun $p(x) \neq 0$ für $x \in I$. Dann ist w Lösung der skalaren Differentialgleichung

$$y^{(4)} = -2\frac{p'(x)}{p(x)}y^{(3)} - \frac{p''(x)-q(x)}{p(x)}y^{(2)} + \frac{q'(x)}{p(x)}y^{(1)} - \frac{r(x)}{p(x)}y + \frac{a(x)}{p(x)}$$

4. Ordnung dar.

2. Die DGL $y''' + y = \sin x$ ist von dritter Ordnung, auch wenn y'' und y' fehlen.

10.2 Lösungsmethoden für spezielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

10.2.1 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen: $y' = g(x) \cdot h(y)$

Wir betrachten hier eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(x) \cdot h(y) \tag{10.2.1}$$

mit

$$g \in C(I)\,, h \in C(J)\,,$$

wobei $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle sind.

Solche Differentialgleichungen treten häufig als eigenständiges Problem aber auch als Hilfsproblem bei der Betrachtung spezieller Differentialgleichungen (*Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen, Bernoullische Differentialgleichungen, lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit variablen Koeffizienten*) auf.

Wenn $y_0 \in J$ eine Nullstelle von h ist, so ist $y\colon I \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = y_0$ für alle $x \in I$ eine von (10.2.1).

Wir setzen daher nun

$$h(y) \neq 0 \quad \text{für alle } y \in J$$

voraus.

Angenommen, $y\colon D(y) \subseteq I \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung von (10.2.1) mit $y(x_0) = y_0 \in J$ und $h(y(x)) \neq 0$ für $x \in D(y)$. Dann gilt

$$\frac{1}{h(y(x))}y'(x) = g(x) \quad \text{für } x \in D(y)$$

und daher

$$\text{für } x \in D(y)\,,$$

Mit der Substitutionsregel ergibt sich

$$\text{für } x \in D(y)\,.$$

Ist H eine Stammfunktion zu $1/h$ auf J und ist G eine Stammfunktion zu g auf I, so erhalten wir die implizite Lösungsdarstellung

$$\text{für } x \in D(y)\,.$$

Da $H'(\eta) = \frac{1}{h(\eta)} \neq 0$ für alle $\eta \in J$, ist H entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend und damit invertierbar. Sei $H^{-1}\colon H[J] \to J$ die Inverse von H. Es folgt

$$y(x) = \qquad \text{für } x \in D(y)\,. \tag{10.2.2}$$

Sei

$$P =$$

Dann ist die allgemeine Lösung die Gesamtheit aller Funktionen $Y(\cdot, C)$, $C \in P$, mit maximalen Definitionsbereich und

Satz 10.2.1 (Trennung der Variablen). *Seien $g \in C(I)$, $h \in C(J)$.*

1. Wenn $h(\eta) \neq 0$ für alle $\eta \in J$, dann ist $y\colon D(y) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0 \in J$ genau dann eine Lösung von (10.2.1), wenn (10.2.2) gilt, wobei G und H Stammfunktionen von g bzw. $\frac{1}{h}$ auf I bzw. J sind.

2. Wenn $h(y_0) = 0$ für ein $y_0 \in J$, dann ist $y\colon I \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = y_0$ für $x \in I$ eine stationäre Lösung von (10.2.1) auf I.

Satz 10.2.1 impliziert folgendes formales Verfahren:

Methode der **Trennung der Variablen** zur Lösung der DGL

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y)\,. \tag{10.2.3}$$

1. Trennung der Variablen:

2. Integration der linken Seite vom Anfangswert $y_0 \in J$ bis zum Wert $y \in J$ und der rechten Seite vom Anfangswert $x_0 \in I$ bis $x \in I$ ergibt

(10.2.4)

3. Eine Lösung der DGL (10.2.3) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erhält man durch Auflösung von (10.2.4)

Beispiel 10.2.2. Man löse die Anfangswertaufgabe

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0\,, \quad y(0) = 1\,. \tag{10.2.5}$$

Lösung: Für $|x| \neq 1$ formen wir die implizite DGL (10.2.5) um in die explizite DGL

$$y' = -y^2 \frac{2x}{x^2 - 1}\,.$$

Damit erhalten wir

und somit

$$-\frac{1}{y} + 1 = -\ln|x^2 - 1| + \ln|0 - 1| \quad \text{für } |x| \neq 1\,.$$

Auflösung nach y ergibt

$$\text{für } x \in D(y)\,,$$

wobei $D(y) \subseteq]-1,1[$ ein Intervall mit ist. Die Gleichung

$$\ln|x^2 - 1| + 1 = 0$$

für $x \in]-1,1[$ ergibt $-(x^2-1) = \mathrm{e}^{-1}$, d.h., $x = -\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}$ bzw. $x = \sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}$. Maximales Lösungsintervall ist somit

10.2.2 Ähnlichkeitsdifferentialgleichung: $y' = f(y/x)$

Eine Differentialgleichung

$$y' = f(\frac{y}{x}) \tag{10.2.6}$$

auf I mit $f \in C(J)$ und I, J als Intervalle in $\mathbb{R}$ heißt **Ähnlichkeitsdifferentialgleichung**.

1. Wenn $f(z) = z$ für $z \in J$, dann ergibt (10.2.6) die DGL $y' = \frac{y}{x}$. die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.

2. Sei nun $f(z) \neq z$ für $z \in J$. Sei $y \colon D(y) \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (10.2.6). Sei $z \colon D(y) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\text{für } x \in D(y)\,.$$

Dann gilt

$$z'(x) = \qquad\qquad =$$

Die Funktion z ist also Lösung der DGL

$$z' =$$

welche durch Trennung der Variablen behandelt werden kann.

Beispiel 10.2.3. Man löse

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad y(1) = \frac{1}{3}\,.$$

Lösung. Mit erhalten wir

$$z' = \qquad , \quad z(1) = \quad .$$

Die Gleichung $z^2 - z = 0$ hat die Lösungen 0 und 1. Aufgrund der Anfangsbedingung sind daher Lösungen mit Werten im Intervall zu suchen. Durch TdV erhalten wir

und somit

$$\ln|z-1| - \ln|z| - \ln|\frac{1}{3} - 1| + \ln|\frac{1}{3}| = \ln x - \ln 1 \quad \text{für } x > 0 \tag{10.2.7}$$

und z in einem Intervall, welches enthält. Das maximale Intervall mit dieser Eigenschaft ist . Aus (10.2.7) erhalten wir damit

$$\ln\frac{1-z}{z} - \ln\frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \ln x\,, \quad \text{d.h.} \quad \frac{1-z}{z} = 2x\,,$$

d.h., nach Auflösen nach z,

$$z(x) = \qquad \text{für } x \in D(z)$$

mit und für $x \in D(z)$. Die Gleichung $\frac{1}{2x+1} = 0$ hat keine Lösung. Die Gleichung $\frac{1}{2x+1} = 1$ hat die Lösung $x = 0$. Wir erhalten und

$$y(x) = \qquad = \qquad \text{für } y \in \,]0,\infty[\,.$$

10.2.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung

$$y' = \tag{10.2.8}$$

mit $p, q \in C(I)$ nennt man **lineare Differentialgleichung erster Ordnung** auf dem Intervall I. Sie heißt **homogen**, wenn , und anderfalls **inhomogen**.

1. Homogener Fall . Stationäre Lösung ist für $x \in I$. Die anderen Lösungen finden wir durch TdV durch

als

$$y(x) = \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\,,$$

wobei P eine Stammfunktion zu p auf $\mathbb{R}$ ist und x_0 und y_0 freie Parameter sind (x_0 könnte fixiert werden, die Lösung genügt der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$). Man beachte, daß wir die stationäre Lösung durch $y_0 = 0$ erhalten.

Die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL ist damit gegeben durch

$$Y_h(x,C) = \qquad .$$

2. Inhomogener Fall. Wir suchen eine Lösung y mit $y(x_0) = y_0$ und machen dazu den Ansatz (**Variation der Konstanten**)

$$y(x) = \qquad .$$

Durch Einsetzen in (10.2.9) erhalten wir

also

$$C'(x) =$$

Dies ergibt

$$C(x) =$$

und damit

$$y(x) = C(x_0)\mathrm{e}^{P(x)} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{P(x)-P(\xi)} q(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Mit $y(x_0) = y_0$ folgt $C(x_0) = y_0\mathrm{e}^{-P(x_0)}$, d.h.,

$$y_s(x;x,y_0) = \qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

ist die Lösung von (10.2.9) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.

Sei nun $y_s \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige, spezielle Lösung von (10.2.9). Weiter sei

$$Y(x,C) = Y_h(x,C) + y_s(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Y(x,C) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Y_h(x,C) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y_s(x)\\ &= \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad ,\end{aligned}$$

d.h., $Y(\cdot,C)$ ist   10.2.9

Satz 10.2.4. *Sei P eine Stammfunktion von p.*

1. Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung (10.2.9) ist die Schar der Funktionen

$$Y_h(x,C) = \qquad\qquad \textit{für } x \in \mathbb{R} \quad \textit{mit } C \in \mathbb{R}\,.$$

2. Eine spezielle Lösung von (10.2.9) zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist

$$y_s(x;x,y_0) = \qquad\qquad\qquad + \int^{x} \mathrm{e}^{P(x)-P(\xi)} q(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}\,.$$

3. Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung (10.2.9) ist die Schar der Funktionen

$$Y(x,C) = \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{für } x \in \mathbb{R} \quad \textit{mit } C \in \mathbb{R}\,,$$

d.h.,

Beispiel 10.2.5. 1. Man bestimme die allgemeine Lösung zu

$$y' = y + \sin x\,.$$

Lösung: Hier ist $p(x) = 1$, $q(x) = \sin x$. Stammfunktion zu p ist P mit $P(x) = x$. Die allgemeine Lösung des homogenen Problems besteht aus der Funktionenschar

$$Y_h(x,C) = \qquad\qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}\,.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden wir zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$ durch

$$\begin{aligned} y_s(x) &= \int^x \mathrm{e}^{P(x)-P(\xi)} \sin\xi \,\mathrm{d}\xi = \\ &= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Damit stellt die Funktionenschar

$$Y(x,c) = \qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung dar.

2. Man löse

$$y' = xy + 1\,, \quad y(0) = 0\,.$$

Lösung: Hier ist $p(x) = x$, $q(x) = 1$. Stammfunktion zu p ist P mit $P(x) = \qquad$. Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}} \qquad + \int^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\xi^2} 1 \,\mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2} \,\mathrm{d}\xi \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

3. Man bestimme die allgemeine Lösung zu

$$y' = x \cdot y - 2x\,.$$

Lösung: Hier ist $p(x) = x$, $q(x) = 2x$. Stammfunktion zu p ist P mit $P(x) = \frac{1}{2}x^2$. Es ist nicht schwer, die spezielle Lösung $y(x) = \quad$ zum inhomogenen Problem zu sehen. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch die Funktionenschar

$$Y(x,C) = \qquad\qquad\qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}\,.$$

10.2.4 Bernoullische Differentialgleichungen: $y' = p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^n$

Eine Differentialgleichung

$$y' = p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^n \tag{10.2.9}$$

mit $p, q \in C(I)$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ nennt man **Bernoullische Differentialgleichung erster Ordnung** auf dem Intervall I. Sie ist nichtlinear.

Mit der Substitution $z(x) =$ geht (10.2.9) über in die lineare Differentialgleichung

$$z' = (1-n) \cdot p(x) \cdot z + (1-n) \cdot q(x)\,.$$

10.2.5 Exakte Differentialgleichungen

Sei die Funktion $y \in C^1(I)$ implizit gegeben durch

$$u(x, y(x)) = c$$

mit $u \in C^1(I \times J, \mathbb{R})$. Durch Anwendung der Kettenregel erhalten wir

$$\partial_1 u(x, y(x)) + \partial_2 u(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0\,.$$

Die Funktion y ist also Lösung der DGL

$$\partial_1 u(x, y) + \partial_2 u(x, y) \cdot y' = 0\,.$$

Definition 10.2.6. Eine Differentialgleichung

$$p(x, y) + q(x, y) \cdot y' = 0 \tag{10.2.10}$$

mit $p, q \in C^0(I \times J, \mathbb{R})$ heißt **exakte Differentialgleichung** auf $I \times J$, wenn es eine Funktion $u \in C^1(I \times J, \mathbb{R})$ gibt mit

$$\partial_1 u(x, y) = p(x, y)\,, \quad \partial_2 u(x, y) = q(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in I \times J\,.$$

Bemerkung 10.2.7. 1. Wenn (10.2.10) exakt ist, dann sind umgekehrt die Lösungen implizit durch

$$u(x, y) = c$$

gegeben.

2. Man schreibt (10.2.10) auch als

$$p(x, y)\,\mathrm{d}x + q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Damit sind zu klären: Wann ist (10.2.10) exakt? Wie bestimmt man u?

Satz 10.2.8. *Seien $p, q \in C^1(I \times J, \mathbb{R})$. Die DGL (10.2.10) ist genau dann exakt, wenn die* ***Integrabilitätsbedingung***

$$\partial_2 p(x,y) = \partial_1 q(x,y) \quad \text{für } (x,y) \in I \times J \tag{10.2.11}$$

erfüllt ist. In diesem Fall ist die Lösung von (10.2.10) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ implizit gegeben durch

$$u(x, y(x)) = 0\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{x_0}^{x} p(\xi, y_0)\,\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_{x_0}^{x} p(\xi, y)\,\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} q(x_0,\eta)\,\mathrm{d}\eta \quad \text{für } (x,y) \in I \times J\,. \end{aligned}$$

Beispiel 10.2.9. Die DGL

$$x + y^2 + (2xy - 1)y' = 0\,,$$

ist von der Form (10.2.10) mit $p(x,y) = x + y^2$, $q(x,y) = 2xy - 1$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wegen

$$\partial_2 p(x,y) = 2y\,, \quad \partial_1 q(x,y) = 2y \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,$$

ist die Integrabilitätsbedingung (10.2.11) erfüllt. Die Lösung y mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist also implizit gegeben durch $u(x,y) = 0$ mit

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{x_0}^{x} (\xi + y_0^2)\,\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} (2x\eta - 1)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0^2 + xy_0^2 - x_0 y_0^2 + xy^2 - xy_0^2 - y + y_0 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0^2 - x_0 y_0^2 + xy^2 - y + y_0\,. \end{aligned}$$

Ist die DGL (10.2.10) nicht exakt, so kann man versuchen, die Gleichung durch Multiplikation mit einem Faktor $\mu \in C^1(I \times J, \mathbb{R})$, $\mu \neq 0$, in eine exakte Differentialgleichung

$$\mu(x,y)p(x,y) + \mu(x,y)q(x,y)y' = 0$$

umzuwandeln. Wir erhalten die neue Integrabilitätsbedingung

$$\partial_2 \mu(x,y) \cdot p(x,y) + \mu(x,y) \cdot \partial_2 p(x,y) = \partial_1 \mu(x,y) \cdot q(x,y) + \mu(x,y)\partial_1 q(x,y)\,, \tag{10.2.12}$$

welche im allgemeinen eine partielle Differentialgleichung für μ darstellt. Wenn ein solches μ existiert, so heißt es **Eulerscher Multiplikator**.

Meist probiert man nun Faktoren μ zu bestimmen, die entweder von x oder von y abhängen. Soll μ nur von x abhängen, so erhalten wir

$$\mu' = \frac{\partial_2 p(x,y) - \partial_1 q(x,y)}{q(x,y)}\mu\,.$$

Ist dann $\frac{\partial_2 p(x,y) - \partial_1 q(x,y)}{q(x,y)} = r(x)$ unabhängig von x, so stellt dies eine lineare DGL für μ dar und wir können

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} r(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$$

(mit passendem $x_0 \in I$) wählen, falls r im interessierenden Bereich integrierbar ist.

Soll μ nur von y abhängen, so erhalten wir

$$\mu' = -\frac{\partial_2 p(x,y) - \partial_1 q(x,y)}{p(x,y)}\mu\,.$$

Ist dann $\frac{\partial_2 p(x,y) - \partial_1 q(x,y)}{p(x,y)} = r(y)$ unabhängig von y, so stellt dies eine lineare DGL für μ dar und wir können

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{\int_{y_0}^{y} r(\eta)\,\mathrm{d}\eta}$$

(mit passendem $y_0 \in J$) wählen, falls r im interessierenden Bereich integrierbar ist.

Beispiel 10.2.10. Man löse

$$xy^3 + (1 + 2x^2y^2)y' = 0\,.$$

Hier hat man $p(x,y) = xy^3$ und $q(x,y) = 1 + 2x^2y^2$. Wegen

$$\partial_2 p(x,y) = 3xy^2\,, \quad \partial_1 q(x,y) = 4xy^2$$

ist die Integrabilitätsbedingung (10.2.11) nicht erfüllt.

Wir versuchen einen nur von x abhängigen Multiplikator μ zu bestimmen. Dazu muß

$$\frac{\partial_2 p(x,y) - \partial_1 q(x,y)}{q(x,y)} = \frac{3xy^2 - 4xy^2}{(1 + 2xy^2)}$$

unabhängig von y sein, was aber nicht erfüllt ist. Wir versuchen daher nun einen nur von y abhängigen Multiplikator μ zu bestimmen. Dazu muß

$$r(y) = -\frac{\partial_2 p(x,y) - \partial_1 q(x,y)}{p(x,y)} = -\frac{3xy^2 - 4xy^2}{xy^3} = \frac{xy^2}{xy^3} = \frac{1}{y}$$

unabhängig von x sein, was erfüllt ist. Für $0 \notin J$ erhalten wir allgemein

$$\mu(y) = C\mathrm{e}^{\ln|y|}\,,$$

und speziell $\mu(y) = y$. Die mit diesem Multiplikator multiplizierte Gleichung ist exakt und kann nach Satz 10.2.8 behandelt werden.

10.2.6 Spezielle nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Wir hier noch wichtige Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche sich auf Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden können.

Prinzipiell setzen wir voraus, daß die auf der rechten Seite auftretende Funktion f auf geeignetem Definitionsbereich stetig ist.

Typ $y'' = f(y)$

Trick:

Man erkennt $2y'y'' =$.

Sei $y\colon D(y) \to D(f)$ eine Lösung der Differentialgleichung.
Wegen

$$\int 2y'(\xi)y''(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int \qquad \mathrm{d}\xi = \int \qquad \mathrm{d}\xi$$

erhalten wir mit der Substitutionsregel

mit einem passendem $c \in \mathbb{R}$. Hieraus erhalten wir zwei Differentialgleichungen erster Ordung

$$y' = \qquad \text{bzw.} \quad y' =$$

für y, welche durch Trennung der Variablen behandelt werden können.

Beispiel 10.2.11. Man löse das Anfangswertproblem $y'' = 2y^3, y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Wir haben $f(y) =$. Eine Stammfunktion F ist durch $F(y) = \frac{1}{2}y^4$ gegeben. Eine Lösung y muß also

$$y' = \qquad \text{oder} \quad y' =$$

mit passendem $c \in \mathbb{R}$ lösen. Mit den Anfangsbedingungen folgt $\quad = y'(0) =$. Dies ist nur für das Vorzeichen erfüllbar und dann nur für $c =$. Wir erhalten also die Differentialgleichung

$$y' = \quad = \quad .$$

Durch TdV folgt formal

$$=$$

und unter Beachtung der Anfangsbedingung

$$1-\frac{1}{y(x)} = \qquad = \qquad = \qquad = x-0\,.$$

Hieraus folgt

$$y(x) = \qquad \text{für } x \in D(y)\,,$$

wobei $D(y)$ noch geeignet zu bestimmen ist. Aufgrund der Anfangsbedingung muß gelten. Maximal mögliches Existenzintervall ist damit $D(y) =$. Wie die Probe zeigt, ist dies auch tatsächlich das maximale Existenzintervall der gesuchten Lösung.

$\boxed{\textbf{Typ } y'' = f(x,y')}$ **mit den AB** $y(x_0) = y_0$**,** $y'(x_0) = y_1$**.**

Trick: Substitution .

Sei $y\colon D(y) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Sei $v\colon D(y) \to \mathbb{R}$ definiert durch $v(x) = y'(x)$ für $x \in D(y)$. Dann gilt

$$v'(x) = \qquad = \qquad = \qquad \text{für } x \in D(y)\,,$$

d.h., v ist Lösung der Differentialgleichung

$$v' =$$

erster Ordnung.

Beispiel 10.2.12. Man löse das Anfangswertproblem $y'' = 1 + \frac{y'}{x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Die Substitution $v(x) =$ führt auf die Differentialgleichung

$$v' = \qquad , \qquad .$$

Dies ist . Mit der Substitution $z(x) =$ erhalten wir

$$z' = \qquad = \quad .$$

Damit folgt $z(x) =$ und

$$v(x) = \qquad = \qquad .$$

Aus $v(1) = 0$ folgt , also . Somit gilt $y'(x) =$.

Da $1 \in D(y)$, folgt $D(y) \subseteq$ und folglich

$$y'(x) = x \ln x \quad \text{für } y \in D(y)\,.$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$y(x) = x^2 \left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4} \right) + c\,.$$

Aus der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ ergibt sich , also $c =$, und damit

$$y(x) = x^2 \left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4} \right) + \qquad \text{für } x \in D(y)\,.$$

Wie die Probe zeigt, gilt tatsächlich $D(y) =$.

$\boxed{\textbf{Typ } y'' = f(y, y')}$ **mit den AB** $y(x_0) = y_0$**,** $y'(x_0) = y_1$**.**

Trick: Bestimme v mit für $x \in D(y)$.

Sei $y\colon D(y) \to \mathbb{R}$ eine Lösung. Dann gilt

$$y''(x) = \qquad =$$

und daher

$$v'(y(x)) \cdot v(y(x)) = \qquad .$$

Somit erfüllt v die Differentialgleichung

$$v' = \qquad , \qquad ,$$

wobei die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ verwendet wurde.

Hat man v als Lösung dieser Differentialgleichung bestimmt, so erhält man die Lösung y als Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \qquad , \quad y(x_0) = y_0\,.$$

Beispiel 10.2.13. Man löse die Anfangswertaufgabe $y'' = -\frac{(y')^2}{5y}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Wegen $f(y, y') = -\frac{(y')^2}{5y}$ lautet das Ersatz-AWP dann

$$v' = \qquad = \qquad , \qquad .$$

Trennung der Variablen liefert:

$$\ln v(y) - \ln 1 = \qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad = -\frac{1}{5}\ln y + \frac{1}{5}\ln 1$$

und somit $v(y) =$ mit $D(v) =$. Damit muß y das Problem

$$y' = \qquad , \quad y(0) = 1$$

lösen. Durch TdV folgt

$$\frac{5}{6}y(x)^{\frac{5}{6}} - \frac{5}{6}1 = \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad = x$$

und damit

$$y(x) = \qquad\qquad\qquad \text{für } x \in D(y)\,,$$

wobei $D(y) =$ das maximale Existenzintervall ist, wie die Probe zeigt.

10.2.7 Schlußbemerkungen

Weitere Lösungsmethoden für spezielle DGL findet man in Büchern zu DGL oder geeigneten Nachschlagewerken.

Einen umfassenden Katalog zu formelmäßig behandelbaren DGL findet man in dem Buch von E.Kamke „Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen".

10.3 Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen

10.3.1 Transformation auf ein DGL-System erster Ordnung

Wir betrachten die explizite, skalare DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}) \tag{10.3.1}$$

mit $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}$. Sei $y \in C^n(D(y), \mathbb{R})$ eine Lösung von (10.3.1).

Seien $z_i \in C^1(D(y), \mathbb{R})$, $i = 0, \ldots, n-1$, mit

$$z_i(x) = \qquad\qquad \text{für } x \in D(y)\,.$$

Dann gilt

$$z_0'(x) = \qquad , \quad z_1'(x) = \qquad , \quad \dots , \quad z_{n-2}' =$$
$$z_{n-1}'(x) =$$

für $x \in D(y)$, d.h., $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \colon D(y) \to \mathbb{R}^n$ ist Lösung der n-dimensionalen DGL erster Ordnung

$$w' = F(x,w)$$

mit

$$F^1(x,w) = \qquad , \quad \dots , \quad F^{n-1}(x,w) = \qquad , \quad F^n(x,w) = \tag{10.3.2}$$

Umgekehrt entspricht auch jeder Lösung von (10.3.2) eine Lösung von (10.3.1).

Mit den entsprechenden Überlegungen für explizite m-dimensionale DGL n-ter Ordnung erhällt man:

Satz 10.3.1.

Bemerkung 10.3.2. 1. Die Umkehrung gilt nicht:

2. Aufgrund dieses Satzes genügt es, DGL-Systeme erster Ordnung zu betrachten.

10.3.2 Allgemeine und spezielle Lösungen

Beispiel 10.3.3. Wir betrachten die DGL $y' = y^3$. Seien $\alpha < \beta \leq \gamma/2$. Dann ist $y \colon \,]\alpha,\beta[\, \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2x}}$ für $x \in \,]\alpha,\beta[$ eine Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2x}} = \qquad\qquad = \qquad\qquad \text{für } x \in \,]\alpha,\beta[\,.$$

Für fixiertes γ können wir das Existenzintervall maximal als $\qquad\qquad$ wählen.

Definition 10.3.4. Wir nennen eine Lösung $y \colon D(y) \to \mathbb{R}^m$ der DGL (10.1.1) **nichtfortsetzbar**, wenn es keine Lösung $\tilde{y} \colon D(\tilde{y}) \to \mathbb{R}^m$ der DGL (10.1.1) gibt mit

Beispiel 10.3.5. In Beispiel 10.3.3 ist $y \colon \,]-\infty, \gamma/2[\, \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2x}}$

Definition 10.3.6. Die **allgemeine Lösung** einer Differentialgleichung (10.1.1) ist
von (10.1.1). Jede Einschränkung $y \colon D(y) \to \mathbb{R}^m$ eines Elementes y der allgemeinen Lösung auf ein echtes Intervall $D(y)$ heißt **spezielle Lösung** von (10.1.1).

Beispiel 10.3.7. In Beispiel 10.3.3 ist $y\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$ mit $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ für $x \in]-1,1[$ eine

Die Funktion $y\colon\ ]-1,\frac{3}{2}[\to \mathbb{R}$ mit $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ für $x \in]-\infty,\frac{3}{2}[$ ist eine

Bemerkung 10.3.8. Unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen an die m-dimensionale Differentialgleichung n-ter Ordnung (10.1.1) stellt die allgemeine Lösung von (10.1.1) eine dar, d.h., es existiert eine Funktion $Y\colon D(Y) \subseteq \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, so daß für jede spezielle Lösung $y\colon D(y) \to \mathbb{R}$ von (10.1.1) Konstanten $(C_1,\ldots,C_n) \in \mathbb{R}^n$ existieren mit

$$(x,C_1,,\ldots,C_n) \in D(Y) \quad \text{und} \quad y(x) = Y(x,C_1,\ldots,C_n) \quad \text{für alle } x \in D(y)\,.$$

Beispiel 10.3.9. 1. Die allgemeine Lösung der DGL $y''' - 7y'' + 6y' = 0$ besteht aus allen Funktionen

$$Y(\cdot,C_1,C_2,C_3)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

mit

$$Y(x,C_1,C_2,C_3) = C_1 + C_2\mathrm{e}^x + C_3\mathrm{e}^{6x} \quad \text{für } (x,C_1,C_2,C_3) \in D(Y) = \mathbb{R}^4\,.$$

Eine spezielle Lösung erhält man bei konkreter Wahl der freien Parameter C_1, C_2, C_3. So ist

$$y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit } y(x) = 1 + 2\mathrm{e}^{6x} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

spezielle Lösung mit der Parameterwahl $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 2$.

2. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(y')^2 + y^2 = 1\,. \tag{10.3.3}$$

Eine Lösungsschar ist durch mit $c \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Weitere zwei Lösungen sind für $x \in \mathbb{R}$. Sei

$$Y(x,C) = \begin{cases} -1 & \text{für } C = -\frac{\pi}{2} \\ \sin(x + \tan C) & \text{für } -\frac{\pi}{2} < C < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{für } C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

für $(x,C) \in D(Y) = \mathbb{R} \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Dann besteht die allgemeine Lösung von (10.3.3) aus allen Funktionen

$$Y(\cdot,C)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad C \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\,.$$

10.3.3 Lokale Existenz

Wir betrachten ein n-dimensionales DGL-System

$$y' = f(x,y) \tag{10.3.4}$$

mit $f \in D(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit einer Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0 \tag{10.3.5}$$

mit $(x_0,y_0) \in D(f)$. Wir wollen folgende Fragen klären:

1. Unter welchen Voraussetzungen an f gibt es eine Lösung $y\colon D(y) \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (10.3.4), (10.3.5)?

2. Wenn $y\colon D(y) \to \mathbb{R}^n$ und $z\colon D(z) \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des Anfangswertproblems (10.3.4), (10.3.5) sind, gilt dann $y(x) = z(x)$ für alle $x \in D(y) \cap D(y)$?

Wenn die beide Frage mit Ja beantwortet werden können, dann nennen wir (10.3.4), (10.3.5) **(lokal) eindeutig lösbar**.

Der folgende Satz geht auf Giuseppe Peano (1858-1932) zurück:

Satz 10.3.10 (Peano). *Sei . Dann ist das Anfangswertproblem* (10.3.4), (*10.3.5*) *, d.h., es existiert ein Intervall* $]a,b[$ *mit* $x_0 \in]a,b[$ *und eine Lösung* $y\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}^n$ *von* (10.3.4), (*10.3.5*).

Daß unter den Bedingungen des Satzes keine Eindeutigkeit der Lösungen folgt, zeigt folgendes Beispiel.

Beispiel 10.3.11. Wir betrachten die DGL

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}\,.$$

Offensichtlich ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ stetig. Die Funktionen $y_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_1(x) = 0$ und $y_2(x) = x^3$ für $x \in \mathbb{R}$ sind Lösungen der DGL zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

10.3.4 Lokale Existenz und Eindeutigkeit

Für die lokale Eindeutigkeit benötigen wir eine Verschärfung der Voraussetzungen an f.

Definition 10.3.12. Die Funktion $f\colon D(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfüllt eine **Lipschitz-Bedingung** bezüglich des zweiten Argumentes auf der Menge $R \subseteq D(f)$, wenn eine Konstante L existiert mit

für alle $(x,y),(x,z) \in R$.

Wir nennen f **(lokal) Lipschitz-stetig** bezüglich des zweiten Argumentes, wenn , so daß f eine Lipschitz-Bedingung bezüglich des zweiten Argumentes auf U erfüllt.

Der folgende Satz ist eine Konsequenz des Mittelwertsatzes:

Satz 10.3.13. *Sei $f \in C(D(f), \mathbb{R}^n)$ mit offenem $D(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*

. Dann ist f Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Argumentes.

existiert eine Schranke L für die Norm der Ableitung von $f(x,\cdot)$ unabhängig von x, so erfüllt f eine Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L auf $D(f)$.

Wir erhalten nun die auf Emile Picard (1856-1941) und Ernst Lindelöf (1870-1946) zurückgehenden Existenz- und Eindeutigkeitssätze.

Satz 10.3.14 (Picard-Lindelöf, qualitative Fassung). *Sei*

mit $(x_0, y_0) \in D(f)$, . Dann ist das Anfangswertproblem (10.3.4), (10.3.5) , d.h., es existiert ein Intervall $]a,b[$ mit $x_0 \in]a,b[$ und eine Lösung $y\colon]a,b[\to \mathbb{R}^n$ von (10.3.4), (10.3.5); ist $z\colon]c,d[\to \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung von von (10.3.4), (10.3.5), so gilt

Satz 10.3.15 (Picard-Lindelöf, quantitative Fassung). *Sei $f \in C(R, \mathbb{R}^n)$ mit*

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| \leq a,\ \|y - y_0\| \leq b\}, \quad a,b > 0\,.$$

Es seien

$$M = \qquad\qquad , \quad \alpha =$$

Erfüllt f eine Lipschitz-Bedingung bezüglich des zweiten Argumentes auf R, dann besitzt das Anfangswertproblem (10.3.4), (10.3.5)

Diese Lösung y kann durch folgendes ***Iterationsverfahren*** *gewonnen werden:*

Sei $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ und sei $u_0 \in C(J, \mathbb{R})$ eine beliebige Funktion mit $\|u_0(x) - y_0\| \leq b$ für alle $x \in J$.

Die Funktionen $u_i \in C(J, \mathbb{R})$, $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ werden iterativ bestimmt durch

$$u_i(x) = \qquad\qquad \text{für } x \in J\,.$$

Dann konvergiert $(u)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen y in folgendem Sinne:

$$\lim_{i \to \infty}$$

Beispiel 10.3.16. 1. Wir betrachten die skalare DGL

$$y' = y\,.$$

Da $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=y$ stetig und bezüglich des zweiten Argumentes differenzierbar ist, ist f Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Argumentes. Mit Satz 10.3.14 folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen zu allen Anfangsbedingungen $y(x_0)=y_0$ mit $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

Wir betrachten nun die Anfangsbedingung $y(0)=1$. Für $x_0=0, y_0=1, a=b=1$ finden wir $M=2$ und damit $\alpha=\frac{1}{2}$. Praktisch können hier b und a aber beliebig groß gewählt werden: Sei zuerst a fixiert. Mit $M=b+1$ und $b\to\infty$ erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit auf $[-a,a]$. Da auch a beliebig groß gewählt werden kann, erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblemes auf $[-a,a]$ für jedes $a>0$.

2. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = x^2+y^2\,,\quad y(0)=0\,.$$

Mit $f(x,y)=x^2+y^2$ sind Voraussetzungen des Satzes 10.3.15 erfüllt. Sei $u_0=0$. Die weiteren Iterierten erhalten wir durch

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= 0+\int_0^x (\xi^2+u_0(\xi)^2)\,\mathrm{d}\xi = \qquad\qquad = \qquad ,\\
u_2(x) &= 0+\int_0^x (\xi^2+u_1(\xi)^2)\,\mathrm{d}\xi = \\
&= \qquad\qquad ,\\
u_3(x) &= 0+\int_0^x (\xi^2+u_2(\xi)^2)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x (\xi^2+(\frac{1}{3}\xi^3+\frac{1}{63}x^7)^2)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7+\frac{2}{2079}x^{11}+\frac{1}{59535}x^{15}\,.
\end{aligned}$$

Die Funktion u_3 ist im Intervall $[-1,1]$ schon eine gute Näherung für die gesuchte Lösung.