

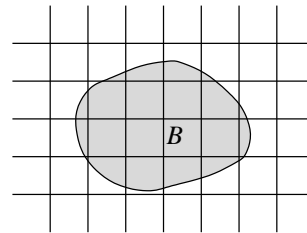
# 12 Flächen- und Volumenintegrale

## 12.1 Integration über ebene Mengen

### 12.1.1 Erweiterung des Flächeninhaltsbegriffes

In einigen Spezialfällen haben wir ebenen Mengen (d.h. Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ ) bereits einen Flächeninhalt zugeordnet (siehe Abschnitt 9.1). Nun wollen wir für eine recht umfangreiche Klasse von ebenen Mengen den Begriff des Flächeninhalts definieren.

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte Menge. Sei  $k$  eine natürliche Zahl.  $\mathbb{R}^2$  sei mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen und bezüglich dieses von einem Gitter achsenparalleler abgeschlossener Quadrate der Seitenlänge  $k$  (so genannter  $k$ -Quadrate) überdeckt. Der Flächeninhalt jedes  $k$ -Quadrats ist



Sei

$\underline{s}_k(B) :=$  Summe der Flächeninhalte aller  $k$ -Quadrate,

$\bar{s}_k(B) :=$  Summe der Flächeninhalte aller  $k$ -Quadrate,

Da  $B$  nach Voraussetzung beschränkt ist, gibt es zu jedem  $k$  nur endlich viele  $k$ -Quadrate mit der entsprechenden Eigenschaft.

Durch Vergrößern von  $k$  wird das Gitter verfeinert. Dabei gilt

und daher existieren die Grenzwerte

$\underline{\mathcal{A}}(B) :=$  (Approximation von innen),

$\overline{\mathcal{A}}(B) :=$  (Approximation von außen).

## 12 Flächen- und Volumenintegrale

**Definition 12.1.1.** Die Menge  $B \subset \mathbb{R}^2$  heißt **Riemann-meßbar**, wenn  $\mathcal{A}(B)$  existiert. Dieser gemeinsame Wert heißt dann **Flächeninhalt**  $\mathcal{A}(B)$  der Menge  $B$ . ( $\mathcal{A}$  für “area”, lat.: Fläche.)

Ist  $N \subset \mathbb{R}^2$  Riemann-meßbar und gilt  $\mathcal{A}(N) = 0$ , so heißt  $N$  **Nullmenge** in  $\mathbb{R}^2$ .

**Satz 12.1.2.** Für beschränkte Teilmengen  $B$  und  $N$  von  $\mathbb{R}^2$  gilt:

- (i)  $B$  ist genau dann Riemann-meßbar, wenn der Flächeninhalt  $\mathcal{A}(B)$  existiert.
- (ii) Ist  $B$  Riemann-meßbar und  $N$  Nullmenge in  $\mathbb{R}^2$ , so gilt

$$\mathcal{A}(B \cup N) = \mathcal{A}(B) + \mathcal{A}(N) = \mathcal{A}(B)$$

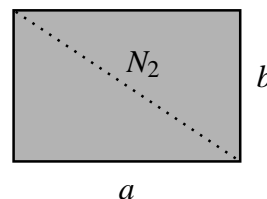
**Satz 12.1.3.** Jede aus endlich vielen, weiteren Punkten bestehende Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  ist Nullmenge in  $\mathbb{R}^2$  und eventuell Riemann-meßbar.

Aus diesen Sätzen folgt:

**Folgerung 12.1.4.** Jede beschränkte Teilmenge  $B$  von  $\mathbb{R}^2$ , deren Rand aus endlich vielen, stetig differenzierbaren Kurvenstücken und eventuell endlich vielen weiteren Punkten besteht, ist Riemann-meßbar.

**Folgerung 12.1.5.** Jede beschränkte Teilmenge  $B$  von  $\mathbb{R}^2$ , deren Rand aus endlich vielen, stetig differenzierbaren Kurvenstücken und eventuell endlich vielen weiteren Punkten besteht, ist Riemann-meßbar.

**Beispiel 12.1.6.** Es sei  $B$  ein abgeschlossenes Rechteck in der Ebene mit den Seitenlängen  $a > 0$  und  $b > 0$ .  $N_1$  sei die aus den vier Seitenlinien bestehende Menge und  $N_2$  eine Diagonale. Dann sind  $N_1$  und  $N_2$  Nullmengen in  $\mathbb{R}^2$ , und es gilt



**Beispiel 12.1.7.** Es sei  $B$  wie in Beispiel 12.1.6 und

$$M := \{(x, y) \in B : x \text{ und } y \text{ rationale Zahlen}\}.$$

Dann gilt  $\mathcal{A}(M) = 0$  (denn jedes  $k$ -Quadrat enthält auch Punkte mit mindestens einer irrationalen Koordinate) und  $\mathcal{A}(B \setminus M) = \mathcal{A}(B)$ . Also ist  $M$  Nullmenge in  $\mathbb{R}^2$ .

### 12.1.2 Der Begriff des Flächenintegrals

Es soll das Integral einer Funktion über eine beschränkte ebene Menge definiert werden.

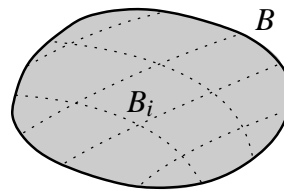
Wir erinnern an die Definition des Integrals  $\int_a^b f(x) dx$  mittels Riemann-Summen der Form

$$S(f) := \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

die zu einer Zerlegung  $Z = \{a = x_0, x_1, \dots, x_m = b\}$  des Intervalls  $[a, b]$  gehören. Hierbei ist  $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$  die Länge des Teilintervalls  $[x_{i-1}, x_i]$  und  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Nun sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte Menge und  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Mittels glatten Kurvenstücken sei eine Zerlegung  $Z$  von  $B$  in Teilmengen  $B_1, \dots, B_m$  vorgenommen. Die Menge  $B$  sei so beschaffen, daß  $B_i$  ein Flächenstück ist, und es sei  $\Delta B_i := \mathcal{A}(B_i)$  der Flächeninhalt von  $B_i$ . Weiter sei  $(\xi_i, \eta_i) \in B_i$  beliebig gewählt.



Dann heißt

$$S(f, Z) := \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta B_i \tag{12.1.1}$$

**Riemann-Summe** von  $f$  bezüglich der Zerlegung  $Z$ .

Es sei  $\delta(Z)$  der maximale Durchmesser (d.h. das Supremum der Abstände zweier Punkte dieser Menge) der zu  $Z$  gehörigen Mengen  $B_1, \dots, B_m$ .  $\delta(Z)$  ist ein Maß für die ‘‘Feinheit’’ der Zerlegung  $Z$ .

Statt einer Zerlegung  $Z$  betrachten wir nun eine Folge von ‘‘immer feineren’’ Zerlegungen  $Z_n$  von  $B$  in Mengen  $B_1^{(n)}, \dots, B_{m_n}^{(n)}$ . Dabei soll ‘‘immer feiner’’ bedeuten, daß

gilt. Wenn nun für jede solche Folge  $(Z_n)$  und jede Wahl der Punkte  $(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)}) \in B_i^{(n)}$  die zugehörige Folge der Riemann-Summen stets konvergiert, so hängt deren Grenzwert nur von  $f$  und  $B$  ab und heißt **Flächenintegral** von  $f$  über  $B$ , in Zeichen

oder

Das  $db$  deutet dabei darauf hin, daß wir über einen Bereich integrieren.

In Kurzform kann man die Definition so zusammenfassen:

$$\iint_B f db := \lim_{\delta(Z_n) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)}) \cdot \Delta B_i^{(n)}.$$

**Satz 12.1.8.**

## 12 Flächen- und Volumenintegrale

**Bemerkung 12.1.9.** Aus (12.1.1) mit  $f = 1$  folgt  $S(f, Z) = \sum_{i=1}^m \Delta B_i = \mathcal{A}(B)$ . Alle Riemann-Summen haben denselben Wert und daher ist

$$\text{der Flächeninhalt von } B. \quad (12.1.2)$$

### 12.1.3 Berechnung von Flächenintegralen

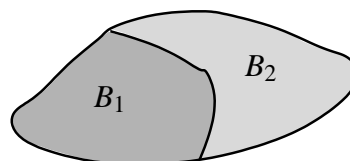
Wir beginnen mit zwei allgemeinen Rechenregeln.

**Satz 12.1.10.** Ist  $B \subset \mathbb{R}^2$  Riemann-messbar,  $N \subset \mathbb{R}^2$  Nullmenge in  $\mathbb{R}^2$  und  $B \setminus N$  ist ein disjunktionsloses Zerlegen von  $B$ , so gilt (vgl. Satz 12.1.2)

$$\iint_B f \, db = \iint_{B_1} f \, db + \iint_{B_2} f \, db \quad (12.1.3)$$

**Satz 12.1.11.** Seien  $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2$  Riemann-messbare Mengen, die höchstens eine Nullmenge gemeinsam haben. Weiter sei  $f: B_1 \cup B_2 \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stetig. Dann gilt

$$\iint_{B_1 \cup B_2} f \, db = \iint_{B_1} f \, db + \iint_{B_2} f \, db. \quad (12.1.4)$$



Wir definieren nun Klassen von ebenen Mengen, für die das Flächenintegral leicht zu berechnen ist.

#### Definition 12.1.12.

(i) Es seien  $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen mit  $u(x) \leq v(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Dann heißt

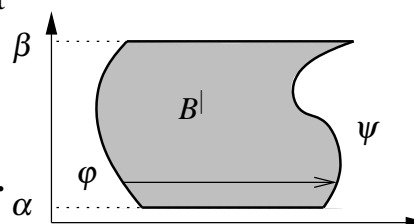
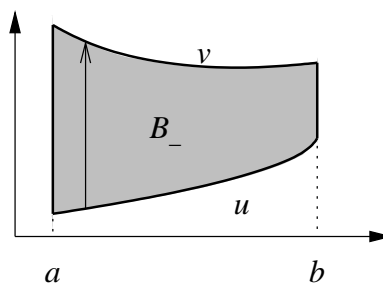
$$B_- := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

**horizontaler Normalbereich** oder **Normalbereich bez. der x-Achse.**

(ii) Es seien  $\varphi, \psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen mit  $\varphi(y) \leq \psi(y)$  für alle  $y \in [\alpha, \beta]$ . Dann heißt

$$B^| := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq y \leq \beta, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

**vertikaler Normalbereich** oder **Normalbereich bez. der y-Achse.**



**Satz 12.1.13.** (i) Ist  $B_- \subset \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse und  $f: B_- \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so gilt

$$\iint_{B_-} f \, db = \iint_{B_-} f(x,y) \, d(x,y) = \tag{12.1.5}$$

(ii) Ist  $B^| \subset \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse und  $f: B^| \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so gilt

$$\iint_{B^|} f \, db = \iint_{B^|} f(x,y) \, d(x,y) = \tag{12.1.6}$$

Durch (12.1.5) wird das Flächenintegral auf ein zweifaches Integral zurückgeführt. Letzteres berechnet man

Entsprechendes gilt für (12.1.6).

**Beispiel 12.1.14.** Die Graphen der Funktionen

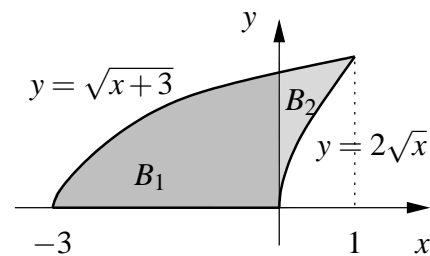
$$f_1(x) = \sqrt{x+3}, \quad f_2(x) = 0, \quad \text{und } f_3(x) = 2\sqrt{x}$$

mit

$$D(f_1) = D(f_2) = [-3, \infty[, \quad D(f_3) = [0, \infty[$$

beranden einen beschränkten Bereich  $B$  der  $x, y$ -Ebene. Gesucht ist der Flächeninhalt  $\mathcal{A}(B)$ .

Lösung: Im Bild ist der Bereich  $B$  dargestellt. Der Schnittpunkt von  $\text{graph}(f_1)$  und  $\text{graph}(f_2)$  ergibt sich aus



Zur Berechnung von  $\mathcal{A}(B) = \iint_B db$  sind zwei Wege möglich.

1. Weg:  $B$  “von der  $x$ -Achse her” betrachten. Nach Satz 12.1.11 gilt

$$\mathcal{A}(B) =$$

wobei  $B_1$  und  $B_2$  Normalbereiche bezüglich der  $x$ -Achse sind. Daher gilt

$$\begin{aligned} \iint_{B_1} db &= \int_{x=-3}^0 \sqrt{x+3} \, dx = \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=-3}^{x=0} = 2\sqrt{3} \\ \iint_{B_2} db &= \int_{x=0}^1 (\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x}) \, dx \end{aligned}$$

## 12 Flächen- und Volumenintegrale

und

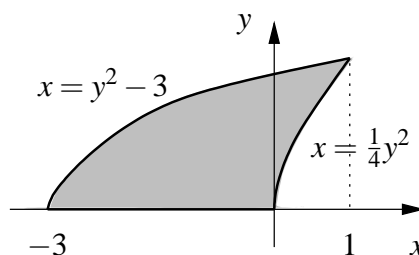
$$\iint_{B_2} db = \quad = \quad = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Somit ist  $\mathcal{A}(B) = 4$ .

2. Weg:  $B$  "von der  $y$ -Achse her" betrachten.  
Dann ist  $B$  selbst Normalbereich. Wegen

$$y = \sqrt{x+3} \iff$$

$$y = 2\sqrt{x} \iff$$



folgt

$$\mathcal{A}(B) = \iint_B db = \quad = \quad = \left[-\frac{1}{4}y^3 + 3y\right]_{y=0}^{y=2} = 4.$$

Der zweite Weg ist hier kürzer und daher hier vorzuziehen.

Wir betrachten noch einen Spezialfall von Satz 12.1.13. Ein Rechteck

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \quad \quad \}$$

ist sowohl Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse als auch Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse. Für jede stetige Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  gilt daher die **Vertauschungsformel**

$$= \iint_B f dB = \iint_B f(x, y) d(x, y) = \quad \quad \quad (12.1.7)$$

### 12.1.4 Anwendungen

Eine Riemann-messbare Menge  $B \subset \mathbb{R}^2$  (Platte) sei mit Masse der Flächendichte  $\rho_F$  belegt.

a) Für die **Masse**  $m$  von  $B$  gilt

$$m = \quad \quad \quad (12.1.8)$$

b) **Statische Momente** von  $B$  :

Denkt man sich die Masse  $\Delta m_i$  des Teilbereichs  $B_i$  im Punkt  $(\xi_i, \eta_i)$  konzentriert, dann ist

$$\Delta m_i \cdot \eta_i \text{ (Masse mal Abstand von der } x\text{-Achse)}$$

das statische Moment dieser Punktmasse bez. der  $x$ -Achse. Durch Summieren und Verfeinern der Zerlegung erhält man für den gesamten Bereich  $B$  :

$$\begin{aligned} M_x &:= && \text{statisches Moment bez. der } x\text{-Achse,} \\ M_y &:= && \text{statisches Moment bez. der } y\text{-Achse.} \end{aligned} \quad (12.1.9)$$

c) Der **Schwerpunkt** (oder **Massenmittelpunkt**) von  $B$  ist definiert als derjenige Punkt  $S = (x_s, y_s)$ , in dem die Gesamtmasse  $m$  dieselben statischen Momente hat wie der Bereich  $B$ . Aus  $mx_s = M_y$  und  $my_s = M_x$  folgt mit (12.1.9):

$$S = (x_s, y_s) \text{ mit } x_s = \quad , \quad y_s = \quad (12.1.10)$$

Ist  $\rho_F(x, y) = \rho_0$  (konstant) für alle  $(x, y) \in B$ , dann ist  $m =$  . Mit (12.1.10) ergibt sich der **geometrische Schwerpunkt**  $\bar{S}$  von  $B$  :

$$\bar{S} = (\bar{x}_s, \bar{y}_s) \text{ mit } \bar{x}_s = \quad , \quad \bar{y}_s = \quad . \quad (12.1.11)$$

d) **Trägheitsmomente** von  $B$  :

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_B \cdot \rho_F(x, y) d(x, y) && \text{Trägheitsmoment bezüglich der } x\text{-Achse,} \\ I_y &= \iint_B \cdot \rho_F(x, y) d(x, y) && \text{Trägheitsmoment bezüglich der } y\text{-Achse,} \\ I_0 &= \iint_B \cdot \rho_F(x, y) d(x, y) && \text{polares Trägheitsmoment,} \\ I_{xy} &= - \iint_B \cdot \rho_F(x, y) d(x, y) && \text{Deviationsträgheitsmoment.} \end{aligned}$$

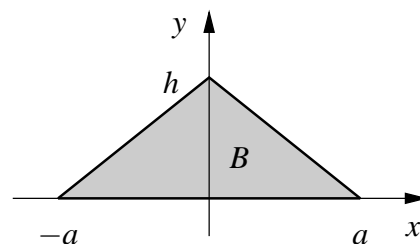
Im Falle  $\rho_F(x, y) = 1$  für alle  $(x, y) \in B$  heißen  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_0$  und  $I_{xy}$  **Flächenmomente**.

**Beispiel 12.1.15.** Es sei  $B$  das gleichschenklige Dreieck im Bild. Gesucht ist das Flächenmoment  $I_x$  bezüglich der  $x$ -Achse.

Lösung: Zur Berechnung von

$$I_x = \iint_B y^2 d(x, y)$$

deuten wir  $B$  als Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse mit der linken Randkurve und der rechten Randkurve



## 12 Flächen- und Volumenintegrale

Hiermit gilt

$$I_x = \iint_B y^2 d(x,y) = \quad = \quad = \frac{ah^3}{6}.$$

## 12.2 Integration über räumliche Mengen

### 12.2.1 Der Begriff des Volumens

Analog zu 14.1.1 definieren wir die Parameterdarstellung eines Flächenstückes  $F \subset \mathbb{R}^3$  als das Bild einer stetigen Abbildung  $f: B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Die in 12.1.1 für beschränkte ebene Mengen durchgeführten Überlegungen lassen sich nun sinngemäß auf beschränkte räumliche Mengen („Körper“) übertragen. Die folgende Tabelle deutet dies an.

	gegebene Menge	Approx. durch	führt zu	speziell
$\mathbb{R}^2$	$B \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt		Riemann-Meßbarkeit	$B$ Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{A}(B) = 0$
$\mathbb{R}^3$	$K \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt		Riemann-Meßbarkeit	$K$ Nullmenge in $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{V}(K) = 0$

Es gelten zu den Sätzen 12.1.2, 12.1.3 analoge Aussagen. Wir formulieren nur deren praktische Konsequenzen:

- Jede beschränkte Teilmenge  $K$  von  $\mathbb{R}^3$ , deren Rand eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^3$  ist [also z.B. nur aus je endlich vielen Flächenstücken, Kurvenstücken oder Punkten besteht] ist
- 

**Beispiel 12.2.1.** Es sei  $K$  ein abgeschlossener Quader mit den Kantenlängen  $a, b, c$ . Der Rand von  $K$  besteht aus den 6 Seitenflächen, den 12 Kanten und den 8 Ecken. Bezeichnet  $N$  den gesamten Rand von  $K$  (oder Teile davon), so ist

*Bemerkung 12.2.2.* Jede Seitenfläche von  $K$  ist



### 12.2.2 Der Begriff des Raumintegrals

Es seien  $K \subset \mathbb{R}^3$  eine beschränkte Menge und  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Es soll das Integral von  $f$  über  $K$  definiert werden. Mittels Flächenstücken sei  $K$  in Teilmengen  $K_1, \dots, K_m$  zerlegt. Jedes  $K_i$  sei Riemann-meßbar mit dem Volumen  $\Delta K_i := \mathcal{V}(K_i)$ . Weiter sei  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in K_i$  beliebig gewählt. Dann heißt

$$S(f, Z) := \quad (12.2.1)$$

**Riemann-Summe** von  $f$ .

Statt einer Zerlegung von  $K$  betrachten wir nun eine Folge von Zerlegungen, die “immer feiner” werden (vgl. 12.1.2), sowie die zugehörige Folge der Riemann-Summen. Wenn diese stets konvergiert, hängt der Grenzwert nur von  $f$  und  $K$  ab und heißt **Raumintegral** von  $f$  über  $K$ , in Zeichen

oder

oder

Hier bezeichnet  $dv$ , daß es sich um ein Volumenintegral handelt.

**Satz 12.2.3.**

### 12.2.3 Berechnung von Raumintegralen

Die den Sätzen 12.1.10, 12.1.11 entsprechenden Sätze sind:

**Satz 12.2.4.** *Ist  $K \subset \mathbb{R}^3$  Riemann-meßbar,  $N \subset \mathbb{R}^3$  Nullmenge in  $\mathbb{R}^3$  und  $f: K \cup N \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stetig, so gilt*

**Satz 12.2.5.** *Seien  $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$  Riemann-meßbare Mengen, die höchstens eine  $\mathbb{R}^3$ -Nullmenge gemeinsam haben. Weiter sei  $f: K_1 \cup K_2 \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stetig. Dann gilt*

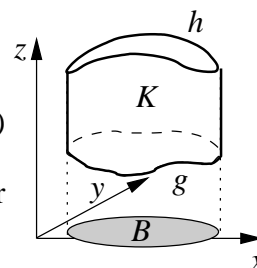
## 12 Flächen- und Volumenintegrale

Grundlage für die Berechnung von vielen Raumintegralen ist der folgende Satz.

Dazu betrachten wir einen zylindrischen Körper

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}, \quad (12.2.2)$$

wobei  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich (bezüglich der  $x$ -Achse oder der  $y$ -Achse) ist und  $g, h: B \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen sind.



**Satz 12.2.6.** Für einen zylindrischen Körper  $K$  mit (12.2.2) gilt

$$\iiint_K f \, dv = \quad (12.2.3)$$

Ist also  $B$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse,

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\},$$

so gilt nach (12.2.3) und (12.1.7):

$$\iiint_K f \, dv = \iiint_K f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \quad (12.2.4)$$

Im Spezialfall  $f = 1$  gilt nach Definition des Raumintegrals

$$\iiint_K dv = \quad (12.2.5)$$

Ist  $K$  der durch (12.2.2) gegebene zylindrische Körper, so gilt nach (12.2.3)

$$\mathcal{V}(K) =$$

### 12.2.4 Anwendungen

Eine Riemann-messbare Menge  $K \subset \mathbb{R}^3$  sei mit Masse der (räumlichen) Dichte  $\rho$  belegt. In Analogie zum ebenen Fall erhält man die folgenden Formeln.

a) Die **Masse**  $m$  von  $K$  ist

$$m = \quad (12.2.6)$$

**Beispiel 12.2.7.** Im  $x, y, z$ -Raum sei  $K$  der von dem Rotationsparaboloid

$$F_1 = \{(x, y, z) : z = \sqrt{3}(x^2 + y^2)\}$$

und der Kugel

$$F_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

berandete, oberhalb der  $x, y$ -Ebene gelegene Körper.  $K$  sei mit Masse der Dichte  $\rho(x, y, z) = z$  belegt. Gesucht ist die Masse  $m$  von  $K$ .

Lösung: 1. Darstellung von  $K$ : Die Schnittkurve  $C$  von  $F_1$  und  $F_2$  ergibt sich aus

Mit  $a := x^2 + y^2$  folgt also  $a = \frac{4}{3}$  (beachte  $a \geq 0$ ).  $C$  ist also ein Kreis um die  $z$ -Achse mit Radius  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  auf der Ebene  $z = \frac{4}{3}$ . Somit gilt

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, z = \sqrt{3}(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq \frac{4}{3}\}$$

mit

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

2. Berechnung des Integrals: Mit (12.2.6) und (12.2.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} m &= \iiint_K z \, dv = \\ &= \int_{x=-1}^1 \left[ \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} [4 - (x^2 + y^2) - 3(x^2 + y^2)^2] \, dy \right] dx. \end{aligned}$$

Die weitere Auswertung der Integrale in kartesischen Koordinaten ist recht mühevoll. Wir brechen die Rechnung hier ab. In 12.3 werden wir eine Methode behandeln, die schneller zum Ziele führt.

b) **Das statische Moment** von  $K$  bezüglich der  $x, y$ -Ebene ist

$$M_{xy} := \iiint_K z(x^2 + y^2) \, dv \tag{12.2.7}$$

Analog sind die statischen Momente bezüglich anderer Ebenen definiert.

## 12 Flächen- und Volumenintegrale

c) Der **Schwerpunkt** (oder **Massenmittelpunkt**)  $S = (x_s, y_s, z_s)$  von  $K$  ergibt sich wieder aus der Bedingung, daß die dort konzentrierte Gesamtmasse  $m$  dieselben statischen Momente habe wie  $K$ . So ist zum Beispiel  $mz_s = M_{xy}$ . Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{m} \iiint_K \rho(x, y, z) \, d(x, y, z), \\ y_s &= \frac{1}{m} \iiint_K \rho(x, y, z) \, d(x, y, z), \\ z_s &= \frac{1}{m} \iiint_K \rho(x, y, z) \, d(x, y, z). \end{aligned} \quad (12.2.8)$$

Ist  $\rho(x, y, z) = \rho_0$  (konstant), dann ist  $m = \rho_0 \mathcal{V}(K)$ . Mit (12.2.8) erhält man den **geometrischen Schwerpunkt**  $\bar{S}(\bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s)$  von  $K$ :

$$\bar{x}_s = \frac{1}{\mathcal{V}(K)} \iiint_K x \, d(x, y, z), \quad \bar{y}_s = \frac{1}{\mathcal{V}(K)} \iiint_K y \, d(x, y, z), \quad \bar{z}_s = \frac{1}{\mathcal{V}(K)} \iiint_K z \, d(x, y, z).$$

d) Man definiert das **Trägheitsmoment (TM)** von  $K$  bezüglich einer Ebene, einer Geraden beziehungsweise eines Punktes durch die Formel

$$I = \iiint_K r^2 \cdot \rho \, dv = \iiint_K r^2 \cdot \rho(x, y, z) \, d(x, y, z) \quad (12.2.9)$$

und folgende Tabelle:

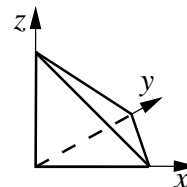
Bezeichnung von $I$	planares TM bez. $x, y$ -Ebene	axiales TM bez. $z$ -Achse	polares TM bez. Nullpunkt
$r^2(x, y, z) =$			

Es ist  $r$  also der Abstand eines variablen Punktes des Körpers vom Bezugsobjekt. Für das planare Trägheitsmoment bezüglich der  $x, y$ -Ebene schreibt man statt  $I$  auch  $I_{xy}$ ; entsprechend  $I_z$  beziehungsweise  $I_0$ . Die Trägheitsmomente bezüglich anderer Ebenen, Geraden und Punkten sind analog definiert.

**Beispiel 12.2.8.** Sei  $K$  das von den Ebenen  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  und  $x + y + z - 1 = 0$  berandete Tetraeder. Die Dichte sei  $\rho(x, y, z) = 1$  (konstant). Gesucht ist das axiale Trägheitsmoment  $I_z$  bezüglich der  $z$ -Achse.

Lösung: Man erhält man

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_K r^2 \, d(x, y, z) = \\ &= \int_{x=0}^1 \left[ \int_{y=0}^{1-x} (x^2 + y^2)(1 - x - y) \, dy \right] dx = \dots = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$



## 12.3 Integration mittels Koordinatentransformation

### 12.3.1 Allgemeiner Fall

Wir erläutern das Ziel des Abschnittes an einem Beispiel.

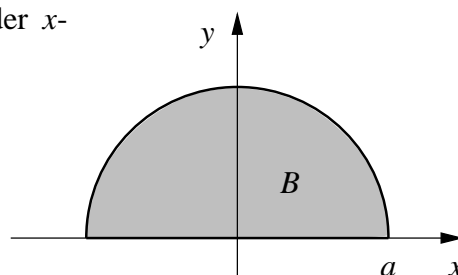
**Beispiel 12.3.1.** Gesucht ist das Flächenmoment  $I_x$  der Halbkreisfläche

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$$

bezüglich der  $x$ -Achse.

Mit der Deutung von  $B$  als Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse erhält man sofort

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_B d(x, y) = \\ &= \int_{x=-a}^a \frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2} dx. \end{aligned}$$



Die Berechnung des letzten Integrals ist allerdings recht aufwendig.

Bei der Transformation der kartesischen Koordinaten  $x, y$  in Polarkoordinaten  $r, \varphi$  gemäß

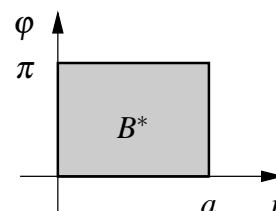
$$T_{\text{polar}} : (r, \varphi) \mapsto (x, y), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

entspricht der Menge  $B$  die Menge

$$B^* = \{(r, \varphi) : \quad \quad \quad \}$$

und es gilt

$$\iint_{B^*} \dots d(r, \varphi) =$$



Zur Berechnung von  $I_x$  auf diesem Wege benötigt man aber einen Zusammenhang zwischen  $\iint_B \dots d(x, y)$  und  $\iint_{B^*} \dots d(r, \varphi)$ .

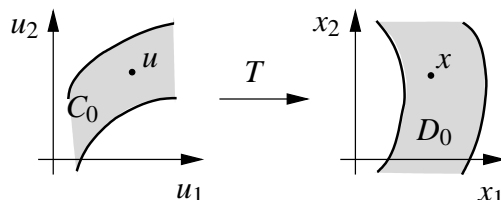
Hiermit wollen wir uns nun allgemein befassen.

Wir beschreiben zuerst die in Frage kommenden Transformationen.

**Definition 12.3.2.** Seien  $C_0$  und  $D_0$  offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ . Eine Vektorfunktion  $T : C_0 \rightarrow D_0$  heißt **zulässige Koordinatentransformation** auf  $D_0$ , wenn gilt

## 12 Flächen- und Volumenintegrale

1.  $T$  ist bijektiv,
2.  $T$  ist auf  $C_0$  stetig (partiell) differenzierbar, und es gilt



*Bemerkung 12.3.3.* Die Surjektivität,

$$T[C_0] = D_0$$

von  $T$  bedeutet zusammen mit der Injektivität, daß jeder Punkt  $P$  von  $D_0$  außer durch seine kartesischen Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  auch durch die zugehörigen Werte  $u_1, \dots, u_n$  beschrieben werden. Daher heißen auch  $u_1, \dots, u_n$  **Koordinaten** von  $P$ .

Die zweite Eigenschaft wird im folgenden benötigt. Die Determinante  $\det J_T(u)$  der Jacobi-Matrix von  $J_T(u)$  heißt **Jacobi-Determinante** (oder **Funktionaldeterminante**) von  $T$ .

Wir kommen nun zur Übertragung der Substitutionsformel (Satz 9.3.17)

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u) \, du$$

auf Flächenintegrale ( $n = 2$ ) und Raumintegrale ( $n = 3$ ).

**Satz 12.3.4.** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  oder  $n = 3$ , Riemann-meßbar und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stetig. Weiter sei  $T: C_0 \rightarrow D_0$  eine zulässige Koordinatentransformation auf  $D_0$  und  $C \subset C_0$  so, daß  $T[C] = D$ . Dann gilt

$$\iint_D f(x, y) \, d(x, y) = \iint_{C_0} f(T(u, v)) \, d(u, v) \quad \text{für } n = 2, \quad (12.3.1)$$

$$\iiint_D f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \iiint_{C_0} f(T(u, v, w)) \, d(u, v, w) \quad \text{für } n = 3. \quad (12.3.2)$$

*Bemerkung 12.3.5.* Für

$$(u, v) \mapsto T(u, v) =$$

## 12.3 Integration mittels Koordinatentransformation

bzw.

$$(u, v, w) \mapsto T(u, v, w) =$$

haben wir

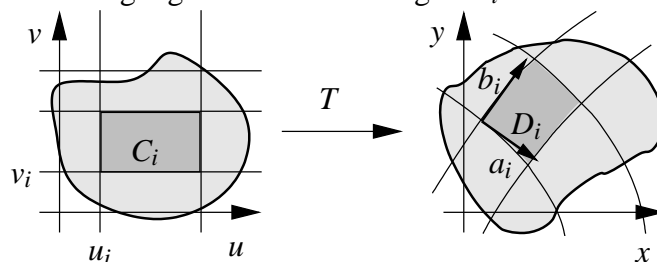
$$f(T(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v)) \quad \text{bzw.} \quad f(T(u, v, w)) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

und

$$\det J_T(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) := \begin{vmatrix} \phantom{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} \\ \phantom{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} \end{vmatrix},$$

$$\det J_T(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}(u, v, w) := \begin{vmatrix} \phantom{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}} \\ \phantom{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}} \\ \phantom{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}} \end{vmatrix}.$$

**Motivation von (12.3.1):** Einer Zerlegung von  $C$  mittels Koordinatenlinien  $u = u_i$  und  $v = v_i$  entspricht eine Zerlegung von  $D$  in Teilmengen  $D_i$ .



Man approximiert nun die Menge  $D_i$  durch das von den Vektoren

$$a_i := \Delta u_i \begin{pmatrix} x_u(u_i, v_i) \\ y_u(u_i, v_i) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_i := \Delta v_i \begin{pmatrix} x_v(u_i, v_i) \\ y_v(u_i, v_i) \end{pmatrix}$$

mit  $\Delta u, \Delta v > 0$  aufgespannte Parallelogramm. Für den Flächeninhalt  $|D_i|$  von  $D_i$  gilt dann

$$|D_i| \approx \begin{vmatrix} \phantom{x_u(u_i, v_i)} & \phantom{x_v(u_i, v_i)} \\ \phantom{y_u(u_i, v_i)} & \phantom{y_v(u_i, v_i)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u(u_i, v_i) & x_v(u_i, v_i) \\ y_u(u_i, v_i) & y_v(u_i, v_i) \end{vmatrix} \Delta u_i \Delta v_i.$$

Mit dem üblichen Summations- und Verfeinerungsprozeß folgt hieraus die Formel (12.3.1). Im Bild ist übrigens angedeutet, daß die Koordinatenlinien  $u = u_i$  bzw.  $v = v_i$  in der  $x, y$ -Ebene im allgemeinen nicht geradlinig (wie in der  $u, v$ -Ebene) sind. Daher heißen  $u, v$  auch **krummlinige Koordinaten**.

*Bemerkung 12.3.6.* Aufgrund der Sätze 12.1.10, 12.2.4 gelten (12.3.1) und (12.3.2) auch, wenn  $C \setminus C_0$  und  $D \setminus D_0$  Nullmengen im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  sind.

### 12.3.2 Ebene Polarkoordinaten

**Definition 12.3.7.** Seien  $C, D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Eine Abbildung  $T_{\text{polar}} : C \rightarrow D$  heißt **(ebene) Polarkoordinatenfunktion**, wenn

$$T_{\text{polar}}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{für } (r, \varphi) \in C.$$

Gilt  $T_{\text{polar}}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , dann heißen  $r$  und  $\varphi$  **(ebene) Polarkoordinaten** des Punktes  $(x, y)$ .

*Bemerkung 12.3.8.* Einem Paar  $(r, \varphi) \in C$  wird durch  $T_{\text{polar}}$  also der Punkt  $(x, y) \in D$  mit

zugeordnet.

Wir betrachten

$$C_1 := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi[ \}.$$

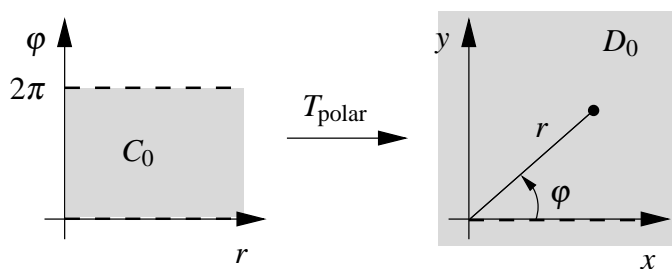
Dann gilt

$$D_1 := T_{\text{polar}}[C_1] = \mathbb{R}^2,$$

d.h., mittels  $T_{\text{polar}}$  auf  $C_1$  hätten wir eine Beschreibung aller Punkte in  $\mathbb{R}^2$  durch Polarkoordinaten. Leider gilt aber  $T_{\text{polar}}(0, \varphi) = (0, 0)$  für jedes  $\varphi \in [0, 2\pi[$ , d.h., der Nullpunkt der  $x, y$ -Ebene wird durch  $r, \varphi$  nicht eindeutig dargestellt. Außerdem ist die Menge  $C_1$  nicht offen.

Wir müssen also  $C_1$  und damit  $D_1$  einschränken, um eine zulässige Koordinatentransformation zu erhalten. Daher setzen wir

$$C_0 := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \varphi \in [0, 2\pi[ \}, \\ D_0 := \mathbb{R}^2 \setminus N_0, \text{ wobei } N_0 := \{(0, 0)\}.$$



Im Bild sollen die gestrichelten Linien andeuten, daß diese Teile des Randes nicht zu  $C_0$  bzw.  $D_0$  gehören. Jeder Punkt  $(x, y) \in D_0$  wird durch einen Punkt  $(r, \varphi) \in C_0$  eindeutig dargestellt, d.h.,  $T_{\text{polar}}$  ist eine Bijektion von  $C_0$  auf  $D_0$ .

Für die Jacobi-Determinante von  $T_{\text{polar}}$  erhält man

$$\det J_{T_{\text{polar}}}(r, \varphi) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}(r, \varphi) = \begin{vmatrix} x_r(r, \varphi) & x_\varphi(r, \varphi) \\ y_r(r, \varphi) & y_\varphi(r, \varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r,$$



### 12.3 Integration mittels Koordinatentransformation

also

$$\det J_{T_{\text{polar}}}(r, \varphi) = \dots \quad (12.3.3)$$

Die partiellen Ableitungen sind auf  $C_0$  stetig, und nach (12.3.3) gilt  $\det J_{T_{\text{polar}}}(r, \varphi) > 0$  für alle  $(r, \varphi) \in C_0$ . Somit ist

$$T_{\text{polar}} : C_0 \rightarrow D_0$$

eine zulässige Koordinatentransformation auf  $D_0$ .

Die **Koordinatenlinien** von  $T_{\text{polar}}$  in der  $x, y$ -Ebene sind

$$\begin{aligned} r = r_0 : \\ \varphi = \varphi_0 : \end{aligned}$$

Die **Transformationsformel** 12.3.1 lautet für **Polarkoordinaten** explizit

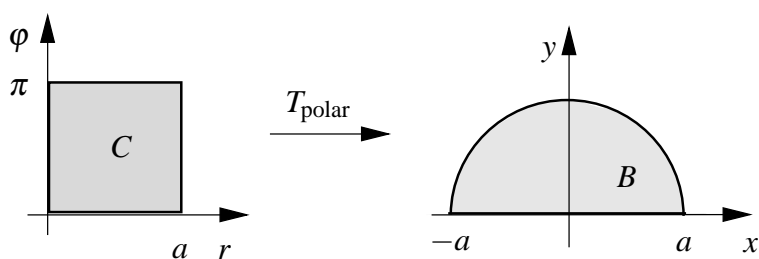
$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \iint_{T_{\text{polar}}[C]} f(x, y) d(x, y), \quad T_{\text{polar}}[C] = D. \quad (12.3.4)$$

*Bemerkung 12.3.9.* Die Mengen  $C_1 \setminus C_0$  und  $D_1 \setminus D_0$  sind  $\mathbb{R}^2$ -Nullmengen, so daß (12.3.4) nach Bemerkung 12.3.6 für

**Beispiel 12.3.10.** Wir kommen auf Beispiel 12.2.7 zurück und verwenden die dort eingeführten Bezeichnungen. Nun soll das Flächenmoment  $I_x$  der Halbkreisfläche  $B$  mittels Polarkoordinaten berechnet werden.

Lösung: Im Hinblick auf die Mengen  $C_0$  und  $D_0$  setzen wir

$$C := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \dots\},$$



Dann ist  $C \setminus C_0$  eine Nullmenge und es gilt  $T_{\text{polar}}[C] = B$ . Daher gilt

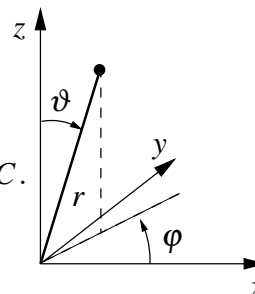
$$\begin{aligned} I_x &= \iint_B d(x, y) = \iint_C d(x, y) \\ &= \int_{r=0}^a r^3 \left[ \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi} dr = \int_{r=0}^a r^3 \frac{\pi}{4} dr = \frac{\pi}{8} a^4. \end{aligned}$$

### 12.3.3 Kugelkoordinaten

**Definition 12.3.11.** Seien  $C, D \subseteq \mathbb{R}^3$ . Eine Abbildung  $T_{\text{Kugel}} : C \rightarrow D$  heißt **Kugelkoordinatenfunktion** oder **räumliche Polarkoordinatenfunktion**, wenn

$$T_{\text{Kugel}}(r, \vartheta, \varphi) = \quad \text{für } (r, \vartheta, \varphi) \in C.$$

Gilt  $T_{\text{Kugel}}(r, \vartheta, \varphi) = (x, y, z)$ , dann heißen  $r$ ,  $\vartheta$  und  $\varphi$  **Kugelkoordinaten** des Punktes  $(x, y, z)$ .



*Bemerkung 12.3.12.* Einem Paar  $(r, \vartheta, \varphi) \in C$  wird durch  $T_{\text{Kugel}}$  also der Punkt  $(x, y, z) \in D$  mit

$$(12.3.5)$$

zugeordnet.

Mit

$$C_1 = \{(r, \vartheta, \varphi) : \quad \}$$

haben wir

$$D_1 := T_{\text{Kugel}}[C_1] = \mathbb{R}^3.$$

Leider ist auch hier  $T_{\text{Kugel}}$  auf  $C_1$  nicht eineindeutig und  $C_1$  ist nicht offen. Somit haben wir  $C_1$  und damit  $D_1$  geeignet einzuschränken, um eine zulässige Koordinatentransformation zu erhalten.

Seien dazu

$$\begin{aligned} C_0 &:= \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \quad \}, \\ D_0 &:= \mathbb{R}^3 \setminus N_0, \text{ wobei } N_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \}. \end{aligned}$$

Dann ist  $T_{\text{Kugel}} : C_0 \rightarrow D_0$  bijektiv. Weiter gilt

$$\det J_{T_{\text{Kugel}}}(r, \vartheta, \varphi) = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{array} \right| =$$

für  $(r, \vartheta, \varphi) \in C_0$ . Damit ist  $T_{\text{Kugel}} : C_0 \rightarrow D_0$  eine zulässige Koordinatentransformation.

*Bemerkung 12.3.13.*  $N_0$  ist die (von der  $z$ -Achse berandete)  $x, z$ -Halbebene mit  $x \geq 0$ . Eine beschränkte räumliche Menge schneidet diese "Ausnahmemenge" höchstens in einer Nullmenge von  $\mathbb{R}^3$ . Bei der Berechnung von Raumintegralen können wir die Menge  $N_0$  also ignorieren (Satz 12.2.4).

Die **Koordinatenflächen** von  $T_{\text{Kugel}}$  im  $x, y, z$ -Raum sind

## 12.3 Integration mittels Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} r &= r_0 : \\ \vartheta &= \vartheta_0 : \\ \varphi &= \varphi_0 : \end{aligned}$$

Die **Transformationsformel** (12.3.2) lautet **für Kugelkoordinaten**:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \iiint_C f(x(r, \vartheta, \varphi), y(r, \vartheta, \varphi), z(r, \vartheta, \varphi)) \, r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \quad (12.3.6)$$

$$T_{\text{Kugel}}[C] = D.$$

*Bemerkung* 12.3.14. Die Mengen  $C_1 \setminus C_0$  und  $D_1 \setminus D_0$  sind  $\mathbb{R}^3$ -Nullmengen, so daß (12.3.6) nach Bemerkung 12.3.6 für beliebige, Riemann-meßbare Menge  $D$  (und  $C$ ) in  $\mathbb{R}^3$  gilt.

Man wird (12.3.6) dann anwenden, wenn die Menge  $D$  (oder wenigstens Teile davon) von Koordinatenflächen der Funktion  $T_{\text{Kugel}}$  berandet wird.

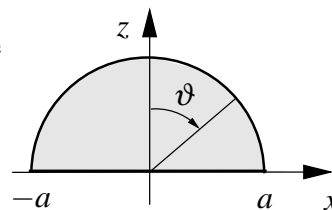
**Beispiel 12.3.15.** Gesucht ist das axiale Trägheitsmoment der Halbkugel

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$$

bezüglich der  $z$ -Achse. Die Dichte sei  $\rho(x, y, z) = 1$  für alle  $(x, y, z) \in D$ .

Lösung: Nach (12.2.9) ist

$$I_z = \iiint_D d(x, y, z) \, d(x, y, z).$$



In Kugelkoordinaten wird  $D$  beschrieben durch

$$C = \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Somit gilt nach (12.3.6)

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_C r^2 \sin^3 \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a r^2 \sin^3 \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ 2\pi \frac{a^5}{5} \sin^3 \vartheta \right] d\vartheta. \end{aligned}$$

**Beispiel 12.3.16.** Der Kegel

$$K_1 = \{(x, y, z) : 3x^2 + 3y^2 - z^2 \leq 0\}$$

bohrt aus dem Kugelkörper

$$K_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}$$

einen Körper  $D$  aus. Gesucht ist der geometrische Schwerpunkt  $\bar{S}$  von  $D$ .

Lösung:  $\bar{S} = (\bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s)$  ist nach (12.2.8) zu berechnen. Aus Symmetriegründen ist  $\bar{x}_s = \bar{y}_s = 0$ . Weiter gilt

$$\bar{z}_s = \frac{1}{\mathcal{V}(D)} \iiint_D d(x, y, z) \quad \text{mit} \quad \mathcal{V}(D) =$$

$K_1$  ist eine Koordinatenfläche von  $T_{\text{Kugel}}$ . Daher empfiehlt sich die Verwendung von Kugelkoordinaten. Hingegen ist  $K_2$  eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt  $(0, 0, 1)$ , also keine Koordinatenfläche von  $T_{\text{Kugel}}$ .

Beschreibung von  $K_1$  in Kugelkoordinaten: Mit (12.3.5) haben wir

$$\begin{aligned} 0 &\geq \\ &= 3r^2(\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta), \end{aligned}$$

also

$$T_{\text{Kugel}}^{-1}[K_1] = \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [\pi/6, \pi/2], \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Beschreibung von  $K_2$  in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} 1 &\geq \\ &= r^2 \sin^2 \vartheta + r^2 \cos^2 \vartheta + 2r \cos \vartheta + 1 \end{aligned}$$

und damit

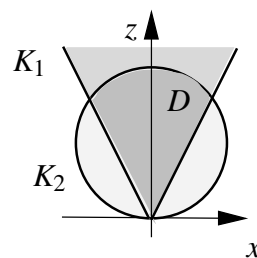
$$T_{\text{Kugel}}^{-1}[K_2] = \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0, 2 \cos \vartheta], \vartheta \in [0, \pi/2], \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Zusammengefaßt erhalten wir

$$T_{\text{Kugel}}[C] = D \quad \text{mit} \quad C := \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0, \pi/2], \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, \min\{2 \cos \vartheta, 3 \cos^2 \vartheta\}]\}.$$

Für das Volumen  $\mathcal{V}(D)$  von  $D$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(D) &= \iiint_D d(x, y, z) = \iiint_C r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[ \int_{\vartheta=0}^{\pi/6} \frac{8}{3} \cos^3 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right] d\varphi = \frac{7\pi}{12}. \end{aligned}$$



Aus Symmetriegründen ist  $\bar{x}_s = \bar{y}_s = 0$ . Weiter gilt

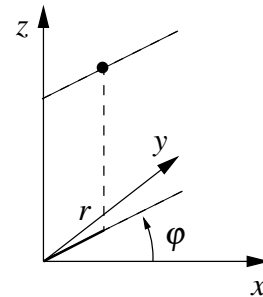
$$\begin{aligned} \bar{z}_s &= \frac{1}{\mathcal{V}(D)} \iiint_D z \, d(x,y,z) = \frac{1}{\mathcal{V}(D)} \iiint_C \\ &= \\ &= \frac{12}{7\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[ \int_{\vartheta=0}^{\pi/6} 4 \cos^5 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right] d\varphi = \frac{37}{28} = 1.32. \end{aligned}$$

### 12.3.4 Zylinderkoordinaten

**Definition 12.3.17.** Seien  $C, D \subseteq \mathbb{R}^3$ . Eine Abbildung  $T_{\text{Zylinder}} : C \rightarrow D$  heißt **Zylinderkoordinatenfunktion**, wenn

$$T_{\text{Zylinder}}(r, \varphi, z) = \quad \text{für } (r, \varphi, z) \in C.$$

Gilt  $T_{\text{Zylinder}}(r, \varphi, z) = \quad$ , dann heißen  $r, \varphi$  und  $z$  **Zylinderkoordinaten** des Punktes  $(x, y, z)$ .



*Bemerkung 12.3.18.* Einem Paar  $(r, \varphi, z) \in C$  wird durch  $T_{\text{Zylinder}}$  also der Punkt  $(x, y, z) \in D$  mit

$$(12.3.7)$$

zugeordnet.

Mit

$$C_1 := \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \}$$

gilt

$$D_1 := T_{\text{Zylinder}}[C_1] = \mathbb{R}^3.$$

Wie bei den Polarkoordinaten müssen wir  $C_1$  und damit  $D_1$  einschränken, um eine zulässige Koordinatenfunktion zu erhalten. Mit

$$C_0 := \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \}, \quad D_0 := T_{\text{Zylinder}}[C_0]$$

ist  $T_{\text{Zylinder}}$  bijektiv von  $C_0$  auf  $D_0$ . Weiter gilt

$$\det J_{T_{\text{Zylinder}}}(r, \varphi, z) = \left| \begin{array}{ccc} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{array} \right| =$$

für  $(r, \varphi, z) \in C_0$ , so daß  $T_{\text{Zylinder}}$  eine zulässige Koordinatenfunktion auf  $D_0$  ist.

Die **Koordinatenflächen** von  $T_{\text{Zylinder}}$  im  $x, y, z$ -Raum sind

## 12 Flächen- und Volumenintegrale

$$\begin{aligned}r &= r_0 : \\ \varphi &= \varphi_0 : \\ z &= z_0 :\end{aligned}$$

Die **Transformationsformel** (12.3.2) lautet für **Zylinderkoordinaten**:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \iiint_{T_{\text{Zylinder}}[C]} f(x, y, z) \, d(x, y, z) \quad (12.3.8)$$
$$T_{\text{Zylinder}}[C] = D.$$

*Bemerkung 12.3.19.* Die Mengen  $C_1 \setminus C_0$  und  $D_1 \setminus D_0$  sind  $\mathbb{R}^3$ -Nullmengen, so daß (12.3.8) nach Bemerkung 12.3.6 für beliebige, Riemann-meßbare Menge  $D$  (und  $C$ ) in  $\mathbb{R}^3$  gilt.

Formel (12.3.8) eignet sich besonders zur Integration über axialsymmetrische räumliche Mengen (Rotationskörper bezüglich der  $z$ -Achse). Für räumliche Mengen, welche axial-symmetrisch bezüglich einer anderen Achse sind, kann man eine entsprechende Drehung verwenden.

**Beispiel 12.3.20.** Wir kommen auf Beispiel 12.2.7 zurück. Der dort beschriebene, mit Masse der Dichte  $\rho(x, y, z) = z$  belegte Körper  $K$  ist ein Rotationskörper bezüglich der  $z$ -Achse. Die gesuchte Masse

$$m = \iiint_K z \, d(x, y, z)$$

soll nun mittels Zylinderkoordinaten berechnet werden.

Beschreibung von  $F_1 = \{(x, y, z) : z \geq \sqrt{3}(x^2 + y^2)\}$  in Zylinderkoordinaten:

und damit

$$T_{\text{Zylinder}}^{-1}[F_1] = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \}.$$

Beschreibung der Vollkugel  $F_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$  in Zylinderkoordinaten:

und damit

$$T_{\text{Zylinder}}^{-1}[F_2] = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \}.$$

### 12.3 Integration mittels Koordinatentransformation

Hiermit ergibt sich, daß die Menge

$$C := \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \}$$

durch  $T_{\text{Zylinder}}$  auf  $K$  abgebildet wird. (Beachte den richtigen Durchschnitt!) Also gilt mit (12.3.8)

$$m = \quad = \quad = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[ \int_{r=0}^1 \frac{1}{2} (4 - r^2 - 3r^4) r \, dr \right] d\varphi = \frac{5\pi}{4} = 3.927.$$

Im letzten Beispiel ist  $F_{\text{Zylinder}}$  in Kugelkoordinaten die Koordinatenfläche  $r = 2$ , so daß man auch an die Verwendung von Kugelkoordinaten denken könnte. Hat man aber die Wahl zwischen diesen und Zylinderkoordinaten, so wird man in der Regel letztere wählen, da ihr Zusammenhang mit kartesischen Koordinaten einfacher ist. Natürlich ist bei dieser Entscheidung auch der Integrand zu beachten. Wäre im Beispiel etwa die Dichte  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , so würde man Kugelkoordinaten wählen.

**Beispiel 12.3.21.** Gegeben sei in der  $x, z$ -Ebene der Normalbereich bezüglich der  $z$ -Achse

$$B = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z_1 \leq z \leq z_2, g(z) \leq x \leq h(z)\}.$$

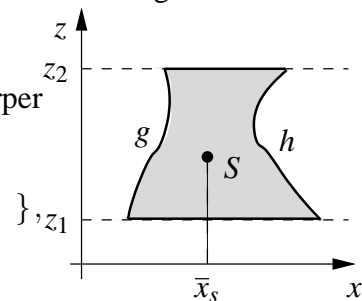
Bei Rotation von  $B$  um die  $z$ -Achse entsteht ein Rotationskörper  $D$ . In Zylinderkoordinaten wird  $D$  beschrieben durch

$$C = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 :$$

d.h., es ist  $T_{\text{Zylinder}}[C] = D$ .

Für das Volumen  $\mathcal{V}(D)$  gilt

$$\mathcal{V}(D) = \iiint_D d(x, y, z) = \quad =$$



Nach Integration über  $\varphi$  gilt weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(D) &= 2\pi \int_{z=z_1}^{z_2} \left[ \int_{r=g(z)}^{h(z)} r \, dr \right] dz = 2\pi \int_{z=z_1}^{z_2} \left[ \int_{x=g(z)}^{h(z)} x \, dx \right] dz \\ &= 2\pi \iint_B x \, d(x, z) = \end{aligned}$$

## 12 Flächen- und Volumenintegrale

Hierbei ist  $\mathcal{A}(B)$  der Flächeninhalt von  $B$ . Mit (12.1.11) folgt schließlich die **2. Guldin-Regel**

$$\mathcal{V}(D) =$$

also