Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Dr. N. Koksch

SS 2010
Blatt 11

Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Gegeben seien folgende Differentialgleichungen:

$$a)\ y'' + y' - 2y = q, \qquad b)\ y'' - 2y' + 5y = q,$$

$$c)\ y''' - y'' - y' + y = q, \qquad d)\ y^{(4)} + 2y'' + y = q,$$

$$e)\ y^{(4)} + 2y''' - y'' - 2y' = q, \quad f)\ y^{(4)} - 4y = q.$$

   a) Geben Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichungen an.

   b) Ersetzen Sie $q = q(x)$ durch folgende Funktionen

$$a)\ x + 2x^2; \qquad b)\ \mathrm{e}^{-2x}; \qquad c)\ \mathrm{e}^x \sin(x) + x^2$$

$$c)\ x^2\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^{-x}; \quad d)\ \mathrm{e}^x\cos(2x); \quad f)\ x^2\mathrm{e}^x\cos(2x).$$

   Lösen Sie die entstehenden inhomogenen Differentialgleichungen.

2. Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionenmengen Fundamentalsysteme linearer homogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind und geben Sie eine solche möglichst niedriger Ordnung an, so dass die Funktionenmengen Lösungen der entsprechenden Differentialgleichung sind:

$$a)\ \mathrm{e}^{2x},\ x\,\mathrm{e}^x,\ \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x; \quad b)\ \sin(2x),\ \mathrm{e}^{-x}; \qquad c)\ \mathrm{e}^{2x}, x\mathrm{e}^{2x}, x^2\mathrm{e}^{2x}$$

$$c)\ x\,\mathrm{e}^x\cos(2x); \qquad d)\ \sin(x),\ \cos(2x),\ \sin(3x); \quad f)\ x,\ x + x^2,\ x^2,\ x^3.$$

3. Berechnen Sie e^A für folgende Matrizen:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad c)\ A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad d)\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben seien das lineare Differentialgleichungssystem

$$y'(x) = Ay(x) + b(x), \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ und } y(0) = (1, 0)^T,$$

   wobei $y(x) = (y_1(x), y_2((x))^T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sei. Lösen Sie die folgenden Aufgaben für die Matrizen

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   und die Störungen

$$a)\ b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b)\ b(x) = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \quad c)\ b(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

   a) Geben Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für das homogene Differentialgleichungssystem an.

   b) Wie lautet die allgemeine Lösung des homogenen Systems.

   c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.

   d) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem.