Prof. Dr. Martin Keller-Ressel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STOCHASTIK

Übung Stochastic Calculus

Aufgabenblatt 6

Übungstermin 14. Juli 2017

Aufgabe 1. Sei $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^r)$ eine r-dimensionale Brownsche Bewegung. Der *quadrierte Bessel-Prozess der Dimension* r ist durch

$$V_t = |B_t|^2 = \sum_{j=1}^{r} (B_t^j)^2$$

gegeben; vergl. Blatt 3, Aufgabe 4.
Zeigen Sie, dass V_t die stochastische Differentialgleichung

$$dV_t = r dt + 2\sqrt{V_t} dB_t^*$$

erfüllt, wobei B^* eine eindimensionale Brownsche Bewegung ist. Hinweis: Lévys Charakterisierung der Brownschen Bewegung.

Aufgabe 2. Seien $r, \sigma, T \in (0, \infty)$ fest gewählt. Die in der Finanzmathematik bedeutende *Black-Scholes-PDGL* für eine Funktion $v(t, s)$ mit $(t, s) \in (0, \infty)^2$ ist gegeben durch

$$\partial_t v + rs\partial_s v + \frac{\sigma^2}{2} s^2 \partial_{ss} v - rv = 0$$

mit der Endwertbedingung $v(T, s) = f(s)$; f stetig und beschränkt.
Zeigen Sie, dass die Transformation $\tau = T - t$, $x = \log(s) + (r - \sigma^2/2)(T - t)$ und $u(\tau, x) = e^{r(T-t)} v(t, s)$ die Black-Scholes-PDGL in die Diffusionsgleichung

$$\partial_\tau u = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} u$$

mit Anfangsbedingung $u(0, x) = f(e^x)$ überführt.

Aufgabe 3. Die Black-Scholes-PDGL sei wie in Aufgabe 2 gegeben und es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{Q})$ ein filtrierter W-Raum mit Brownscher Bewegung $B_t^{\mathbb{Q}}$.
Zeigen Sie: Die Lösung $v(t, s)$ lässt sich darstellen als

$$v(t, s) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[f(S_T) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

wobei S die stochastische DGL

$$dS_t = S_t (r dt + \sigma dB_t^{\mathbb{Q}}), \qquad S_0 = s$$

erfüllt. Bemerkung: Sie dürfen voraussetzen, dass $v(t, s)$ auf $(0, \infty)^2$ beschränkt ist.

Aufgabe 4. Berechnen Sie $v(t, s)$ aus Aufgabe 2 bzw. 3 für die Endbedingung $f(s) = (s - K)_+, \ K > 0$ mit Hilfe einer der Darstellungen aus Aufgabe 2 oder 3.
Bemerkung: Der Wert von $v(t, s)$ entspricht dem Preis zum Zeitpunkt t einer Call-Option mit Ausübungspreis K und Laufzeit T im Black-Scholes-Modell.