

Ausarbeitungen zum Vortragsthema: „Kegelschnitte“

entstanden im Rahmen des Hauptseminars Geometrie im WS 06/07 bei Prof. Weiß

Inhalt:

Einführung in die Kegelschnitte	(Susan Schob).....	2
Die Dandelischen Kugeln	(Thomas Wolff).....	5
Definition von Kegelschnitten mittels Leitlinie.....		8
	(Robert Troschitz)	
Konstruktion von Kegelschnitten	(Christine Höpfner).....	12

KEGELSCHNITTE

1. Einführung

1.1 Kegel

Allgemeiner Kegel (Abb. 1): Verbindet man die Punkte einer beliebigen Raumkurve (= Leitkurve) k , die in der Ebene E liegt, mit einem festen Punkt S (nicht in ϵ), so entsteht ein allgemeiner Kegel.

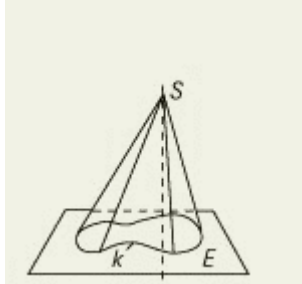


Abb. 1

Allgemeiner Kreiskegel: Ist c ein Kreis, entsteht ein allgemeiner Kreiskegel

Senkrechter Kreiskegel: Wenn S auf der Kreisachse liegt, entsteht ein senkrechter Kreiskegel (Abb. 2), andernfalls ein schiefer Kreiskegel (Abb. 3).

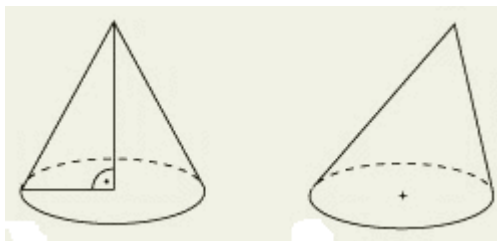


Abb. 2

Abb. 3

1.2 Drehkegel

Drehkegel: Eine Gerade g (= Erzeugende), die die Rotationsachse a in einem Punkt S schneidet, erzeugt bei der Drehung einen Drehkegel (Abb. 4) mit dem Böschungswinkel α .

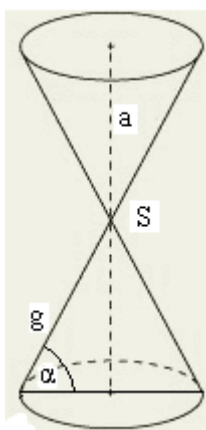
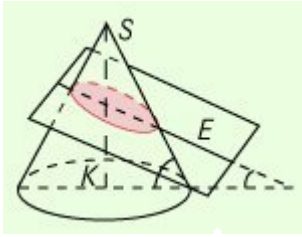
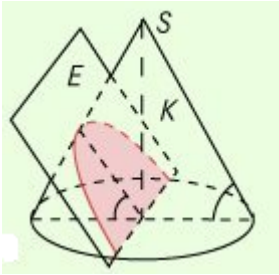
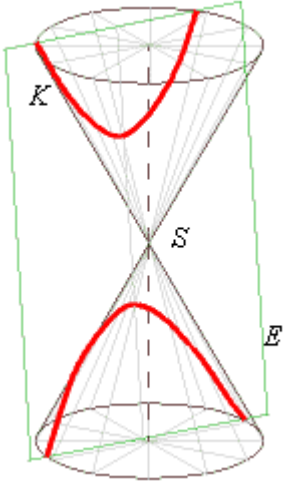


Abb. 4

1.3 Kegelschnitte

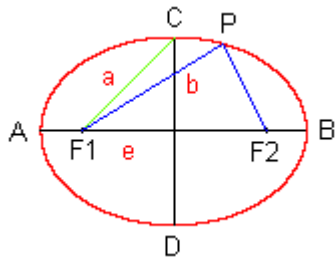
Ein ebener Schnitt eines geraden Kreiskegels (Doppelkegel) ist ein Kegelschnitt.

Folgende Kegelschnitte treten hierbei auf:

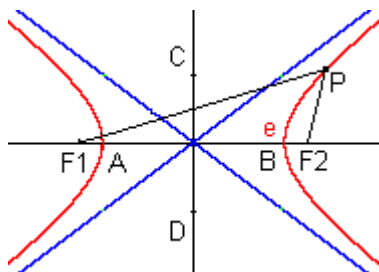
	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Verhältnis: Winkel zwischen Achse/ Ebene (β) und Böschungswinkel (α)	$\alpha > \beta$	$\alpha = \beta$	$\alpha < \beta$
Schnittgerade verläuft im	Endlichen	im Unendlichen und nur auf einer der zwei Kegelhälften	im Unendlichen und auf beiden Teilen des Doppelkegels
parallele Ebene zu E durch S schneidet den Kegel	nur im Punkt S	längs der Mantellinie des Kegels und bildet die Tangentialebene des Kegels	in zwei Mantellinien
Skizze			

1.4 Ortsdefinitionen: Ellipse, Parabel und Hyperbel

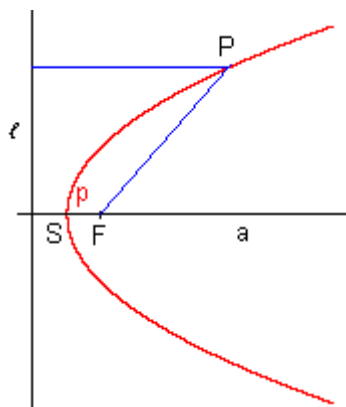
Der geometrische Ort aller Punkte P , für die die *Summe der Entfernungen* von zwei festen Punkten, den Brennpunkten F_1 und F_2 , konstant ist, ist eine **Ellipse**.



Der geometrische Ort aller Punkte P , für die die *Differenz der Entfernungen* von zwei festen Punkten, den Brennpunkten F_1 und F_2 , konstant ist, ist eine **Hyperbel**.



Der geometrische Ort aller Punkte P , für die die *Entfernung von einem festen Punkt*, dem Brennpunkt F , und einer *Leitgeraden* l gleich ist, ist eine **Parabel**.

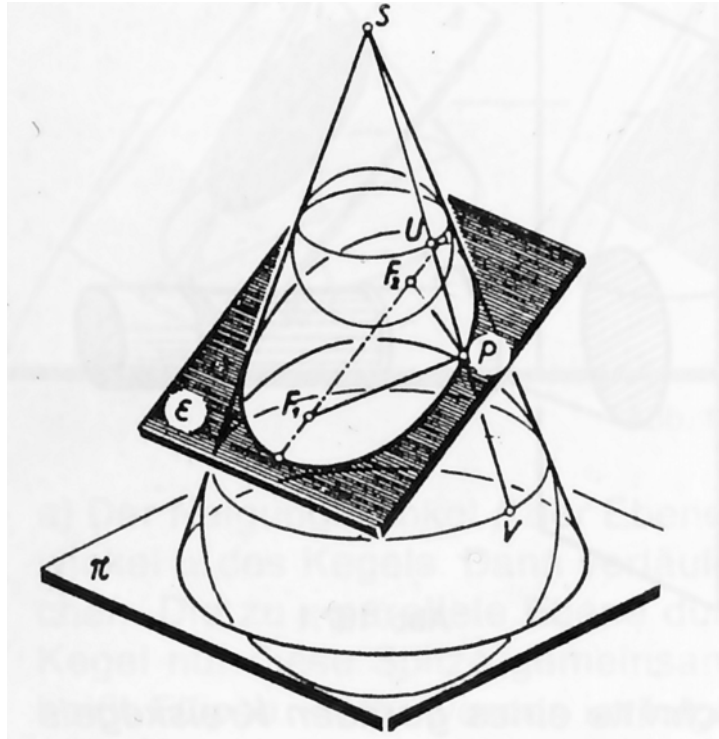


<http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/angeo3.htm>
<http://lexikon.meyers.de/content/Bild:88995z.gif>

Die Dandelinschen Kugeln

- benannt nach Germain Pierre Dandelin (1794 – 1847)
- sind ein Hilfsmittel zum geometrischen Beweis der Tatsache, dass ein ebener Schnitt eines Kegels ein regulärer Kegelschnitt ist

1. Die Ellipse



F_1 - Berührungspunkt der unteren Kugel mit der Schnittebene ε

F_2 - Berührungspunkt der oberen Kugel mit der Schnittebene ε

Sei P nun ein beliebiger Punkt auf dem Kegelschnitt. Die Mantellinie durch den Punkt P schneidet die Berührungskreise der Kugeln mit dem Kegel in den Punkten U, V .

$\overline{PF_1}$ und \overline{PV} liegen auf Streckenabschnitten von Tangenten an die untere Kugel. Da die Tangentenabschnitte von einem Punkt an eine Kugel alle gleich lang sind gilt:

$$\overline{PF_1} = \overline{PV} .$$

Die gleiche Überlegung für die obere Kugel ergibt

$$\overline{PF_2} = \overline{PU} .$$

Damit ist dann $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PV} + \overline{PU}$.

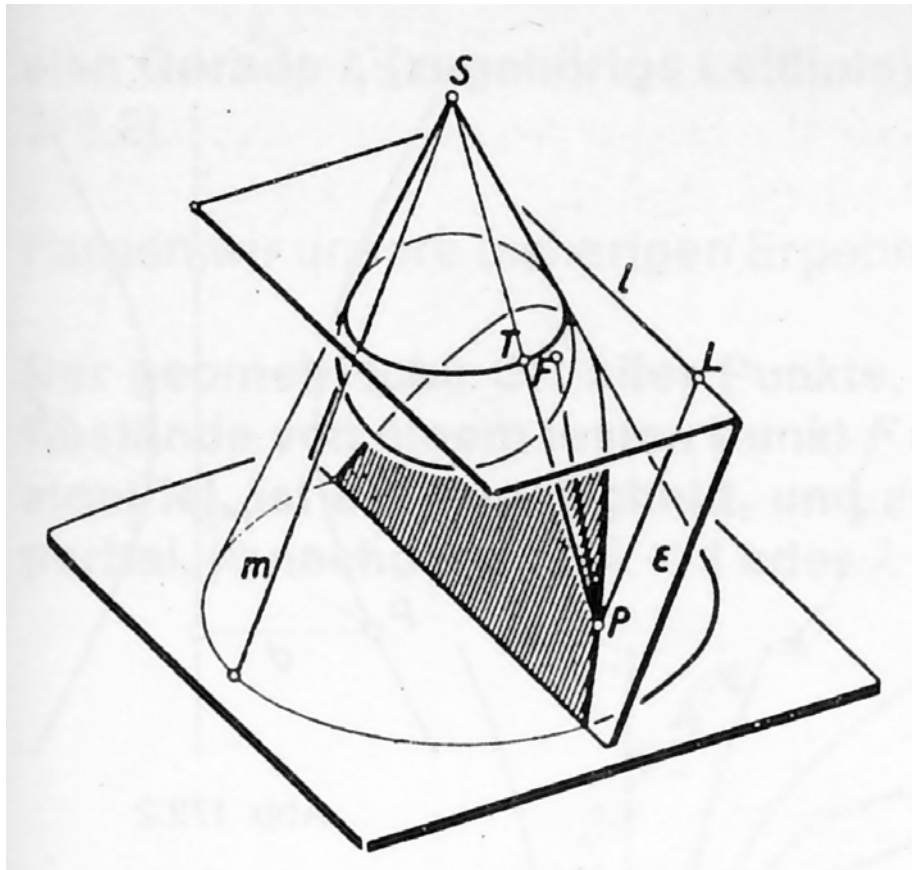
Da aber $\overline{PV} + \overline{PU}$ der auf einer Mantellinie gemessene Abstand der beiden Berührungskreise der Kugeln ist, ist diese Summe für jeden Punkt des Kegelschnitts gleich groß. Daher folgt:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} \text{ konstant.}$$

Die Menge aller Punkte P , die von zwei Punkten die gleiche Abstandssumme haben, ist eine Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 .

2. Die Parabel

Hier können wir nur eine DANDELIN-Kugel einbauen.



F - Berührungspunkt der Kugel mit der Schnittebene ε

Die horizontale Ebene durch den Berührungskreis der DANDELIN-Kugel schneidet die Parabelebene ε in der Gerade l , die man Leitlinie nennt.

Sei P nun ein beliebiger Punkt auf der Parabel, so ergibt sich $\overline{PF} = \overline{PT}$ (Tangentenabschnitte an eine Kugel), wobei \overline{PT} auf einer Mantellinie des Kegels liegt.

Das Lot von P auf die Leitlinie l ergibt den Punkt L , der die gleiche Höhe besitzt wie T .

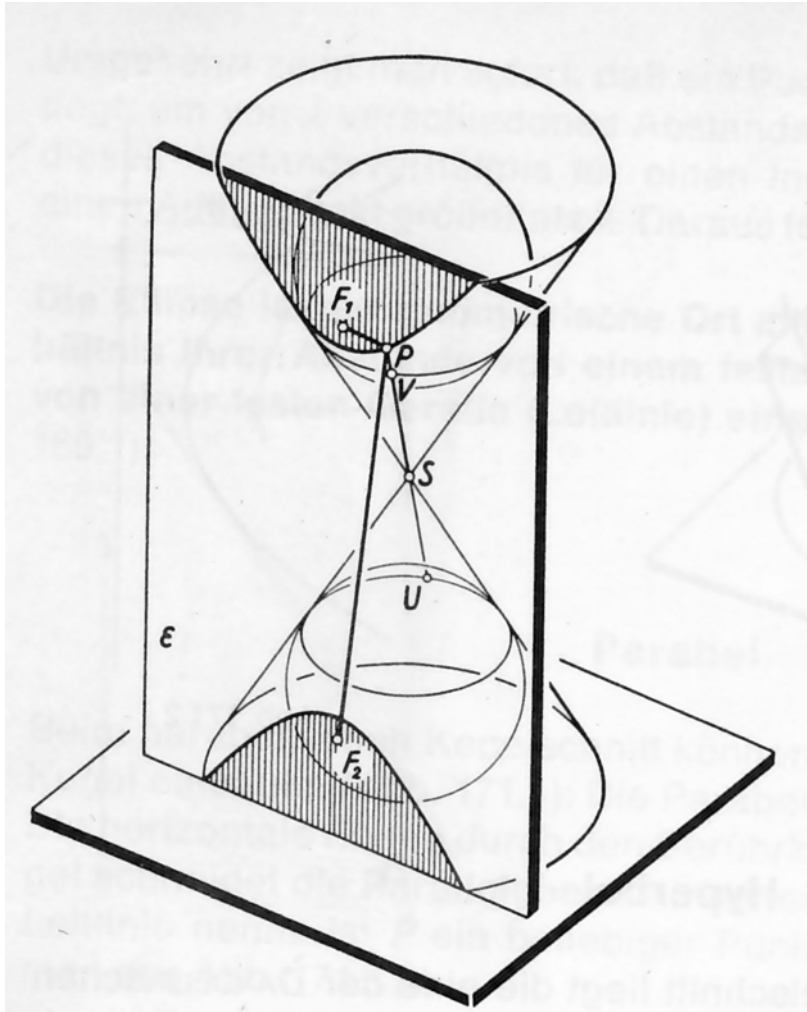
Außerdem haben \overline{PT} und \overline{PL} die gleiche Neigung gegen die Grundebene, da \overline{PL} einer Mantellinie parallel ist.

Daraus folgt nun $\overline{PT} = \overline{PL}$ und $\overline{PF} = \overline{PL}$.

Daher handelt es sich nach Definition um eine Parabel.

3. Die Hyperbel

Bei der Hyperbel liegt eine DANDELIN-Kugel im oberen Teil des Kegels, die andere im unteren.



F_1 - Berührungspunkt der oberen Kugel mit der Schnittebene ε

F_2 - Berührungspunkt der unteren Kugel mit der Schnittebene ε

Es gilt $\overline{PF_2} = \overline{PU}$ (Tangentenabschnitte von P auf die untere Kugel).

Ebenso gilt $\overline{PF_1} = \overline{PV}$ (Tangentenabschnitte von P auf die obere Kugel).

Es gilt also $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{PU} - \overline{PV}$.

$\overline{PU} - \overline{PV} = \overline{UV}$ konstant.

Da eine Hyperbel aber der geometrische Ort aller Punkte ist, für die die Differenz ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist, ist der Schnitt der Ebene ε mit dem Kegel eine Hyperbel.

Definition von Kegelschnitten mittels Leitlinie

Ellipse:

Mit Hilfe der DANDELINSchen Kugeln lässt sich zeigen, dass auch die Ellipse mittels einer Leitlinie definiert werden kann.

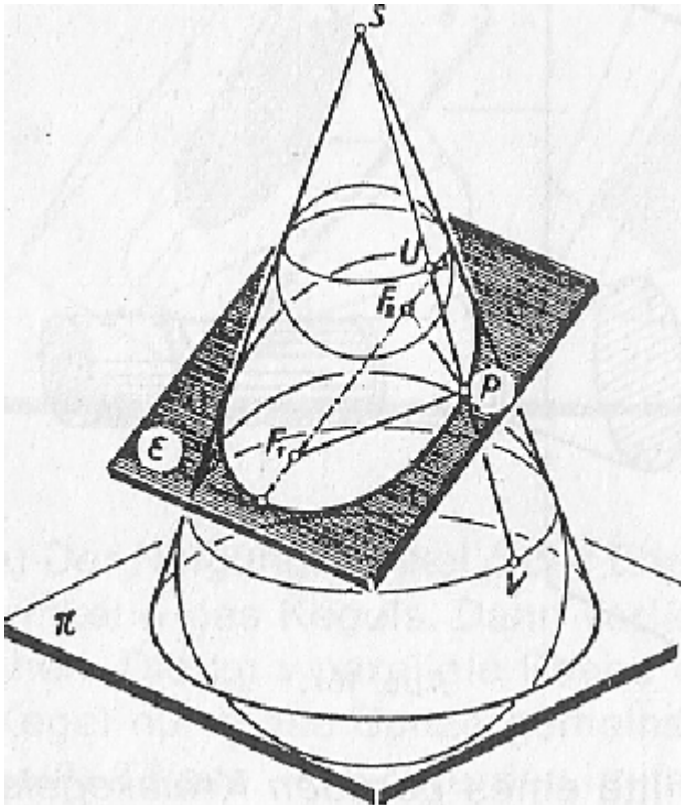


Abb 1

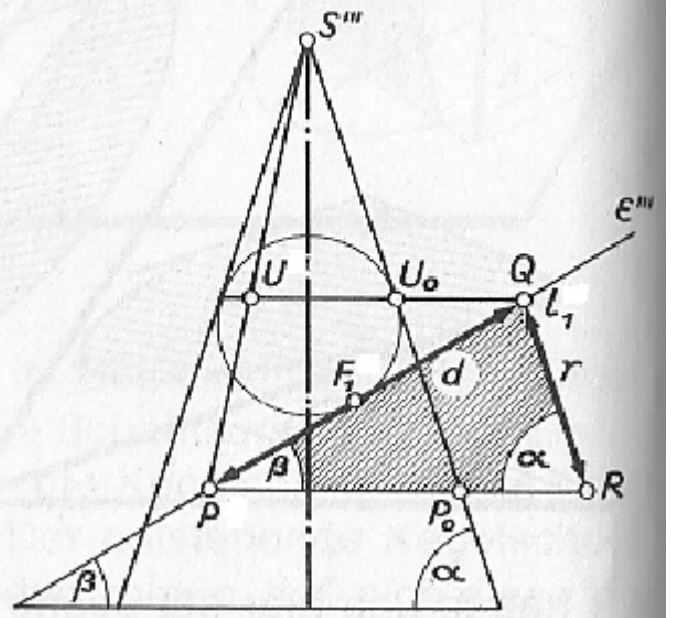


Abb2

Die Leitlinie l_1 (Abb2) ergibt sich als Schnittgerade zwischen der Schnittebene ε (Abb1) und der Ebene durch den Berührkreis der DANDELINSchen Kugel. Der Abstand eines beliebigen Ellipsenpunktes zur Leitlinie ist demnach der Abstand zwischen P und Q, welcher mit d bezeichnet wird. Die Abstand r zwischen dem Ellipsenpunkt P und dem Brennpunkt F_1 ist gleich der Strecke PU und nach Drehung um die Kegelachse erscheint diese als Strecke P_0U_0 . Nach horizontaler Verschiebung ergibt dies die Strecke RQ im Dreieck PRQ. Wendet man den Sinussatz auf dieses Dreieck an, so ergibt sich:

$$\frac{r}{d} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Da bei einem elliptischen Kegelschnitt $\beta < \alpha$ ist, gilt $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} < 1$ und da für eine bestimmte Ellipse β, α fest sind, ergibt sich für $\frac{r}{d}$ ein fester Wert kleiner 1.

Parabel:

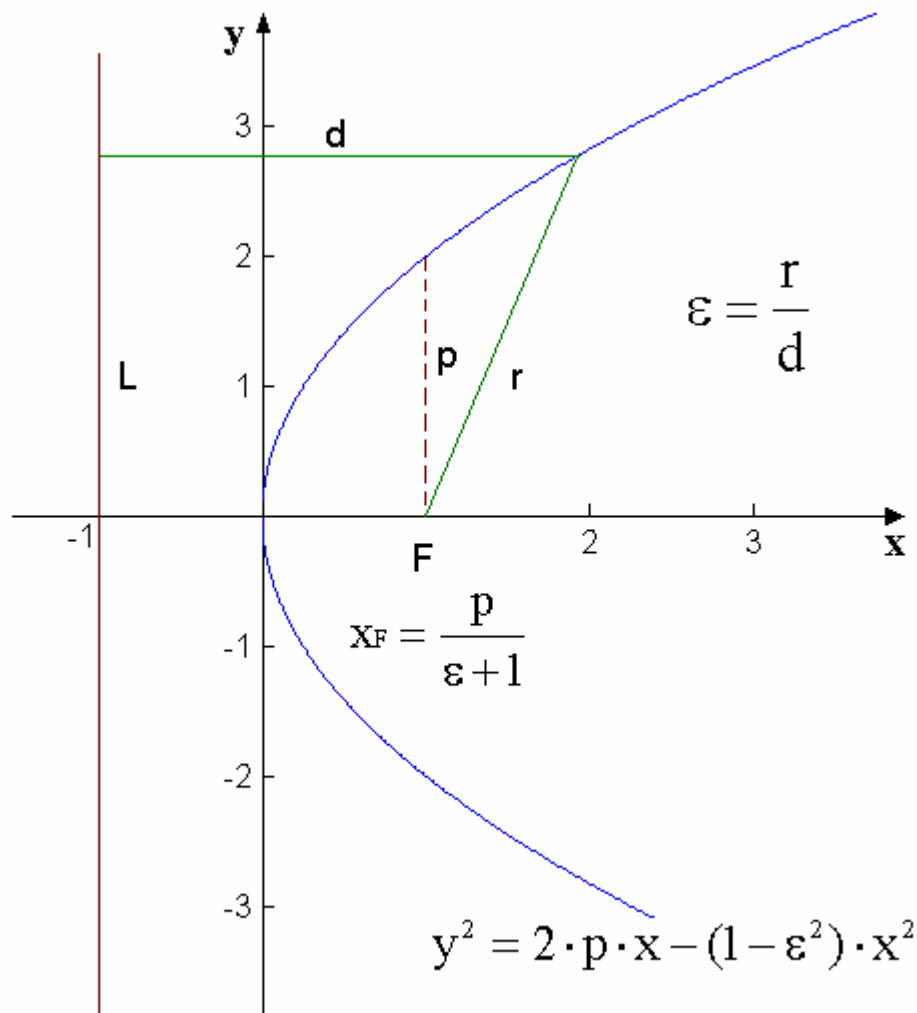
Die Parabel ist bereits über die Leitlinie definiert und es gilt $\frac{r}{d} = 1$.

Hyperbel:

Ähnlich wie bei der Ellipse lässt sich auch für die Hyperbel zeigen, dass $\frac{r}{d}$ einen festen Wert hat, allerdings größer 1.

Dass das Verhältnis $\frac{r}{d} = \varepsilon$ (*numerische Exzentrizität*) eindeutig die Art des Kegelschnittes bestimmt, spiegelt sich in der Scheitelgleichung der Kegelschnitte wieder.

Scheitelgleichung der Kegelschnitte:



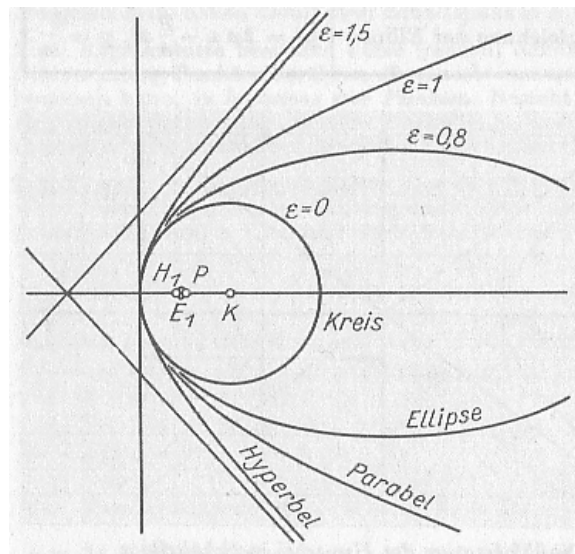
Aus der Scheitelgleichung ergibt sich:

für $\varepsilon=1$ eine Parabel

für $\varepsilon>1$ eine Hyperbel
bzw. ein Ast ein Hyperbel

für $\varepsilon<1$ eine Ellipse

(für $\varepsilon=0$ ergibt sich ein Kreis
als besondere Ellipse)

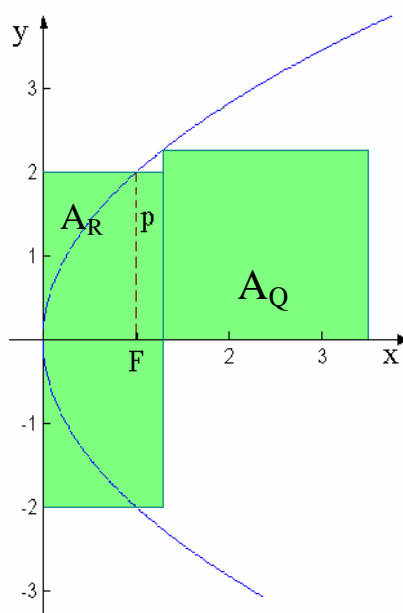


Zur Bedeutung der Namen der Kegelschnitte

(Apollonius von Perga 262-190 v.Chr.)

Die Namen der Kegelschnitte gehen auf einen Flächenvergleich eines Rechtecks mit einem Quadrat zurück.

Hierfür erzeugt der jeweilige Kegelschnitt ein Rechteck mit den Seitenlängen $2p$ und x ($x > x_F$) und ein Quadrat mit der Seitenlänge $y(x_F)$.



Vergleicht man nun die Flächeninhalte von Rechteck und Quadrat so ergibt sich

$$A_R = 2px \quad \text{und} \quad A_Q = y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2$$

also folgt $A_Q - A_R = - (1-\varepsilon^2)x^2$ und damit

$$\text{für } \varepsilon=1: \quad A_Q = A_R$$

$$\text{für } \varepsilon>1: \quad A_Q > A_R$$

$$\text{für } \varepsilon<1: \quad A_Q < A_R$$

Kegelschnitte

Konstruktion von Kegelschnitten

Gliederung

1. Ellipse
 - 1.1. Konstruktion nach Ortsdefinition
 - 1.2. Gärtnerkonstruktion
 - 1.3. Papierstreifen-Konstruktion
2. Hyperbel
 - 2.1. Konstruktion nach Ortsdefinition
 - 2.2. Konstruktion auf Asymptoten bezogen
3. Parabel – Konstruktion nach Ortsdefinition

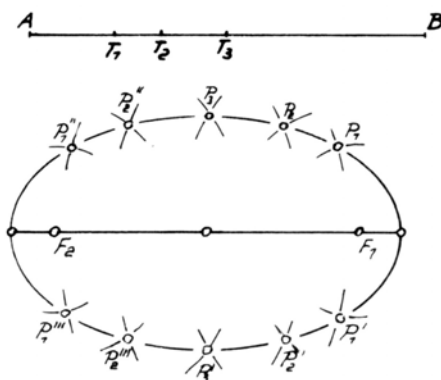
1. Ellipse

1.1. Konstruktion nach Ortsdefinition

Nach der Definition

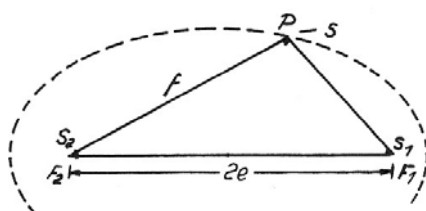
„Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 (Brennpunkte) konstant ist und die mit F_1 und F_2 in derselben Ebene liegen.“

kann man mit Zirkel und Lineal die Ellipse punktweise konstruieren:



- Man teile die Strecke \overline{AB} ein beliebiges Verhältnis
- Man ziehe um F_2 einen Kreisbogen mit dem Radius der ersten Teilstrecke und um F_1 einen Kreisbogen mit dem Radius der zweiten Teilstrecke
- Man wiederhole diesen Vorgang mit anderen Teilungsverhältnissen

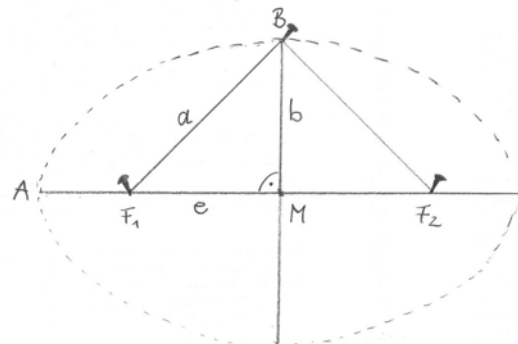
1.2. Gärtnerkonstruktion



- In die Brennpunkte F_1 und F_2 wird jeweils ein Stab gesteckt.
- An diesen Stäben wird ein Faden befestigt.
- Man legt einen dritten beweglichen Stab in den Faden und führt diesen bei stets gespanntem Faden um die beiden anderen Stäbe herum.

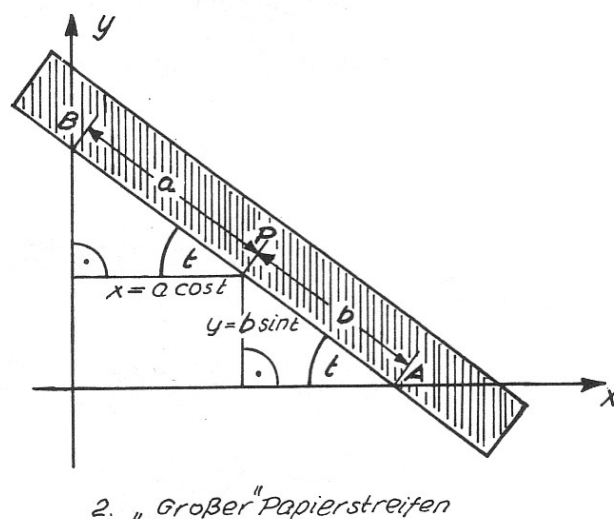
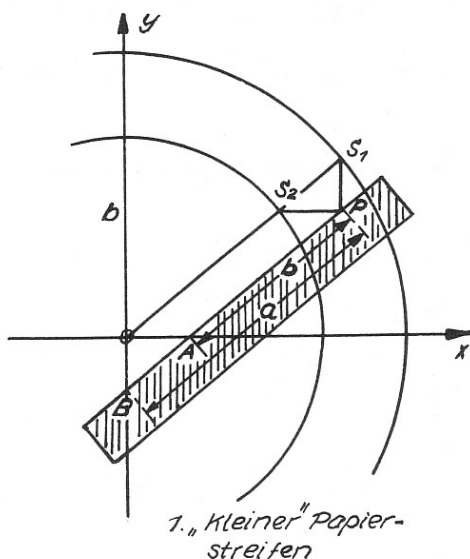
Gesucht ist eine Ellipse, deren Hauptachse und Nebenachse gegeben sind.
 Um den Abstand der Brennpunkte zu finden, überlege man sich folgendes:

- Der zu verwendende Faden muss genauso lang sein, wie die Hauptachse lang werden soll. (Das sieht man, wenn man den beweglichen Stab in den Punkt A zieht)
- Befindet sich der bewegliche Stab in Punkt B, so ist die Strecke $\overline{F_1B}$ genau halb so lang wie der Faden selbst, also die halbe Länge der Hauptachse.
- Somit kann man schlussfolgern:



$$e^2 = (\text{Hauptachse:}2)^2 - (\text{Nebenachse:}2)^2$$

1.3. Papierstreifen-Konstruktion



Am Rand eines Papierstreifens trägt man von einem festen Punkt P die gegebenen Halbachsen nach einer bzw. nach verschiedenen Seiten an. Die dadurch entstandenen Punkte verschiebt man auf den Koordinatenachsen: A bewegt sich auf der x-, B auf der y-Achse. Für jede Verschiebung setzt man bei P einen Ellipsenpunkt.

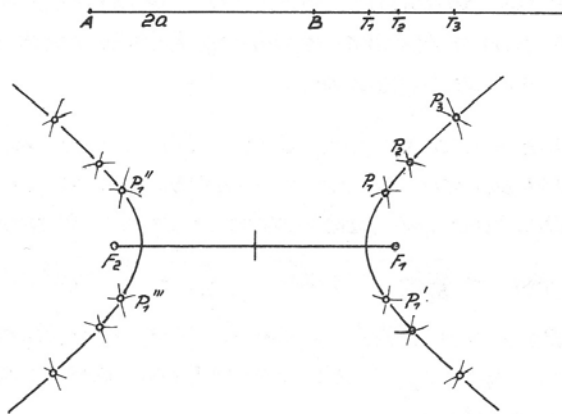
2. Hyperbel

2.1. Konstruktion nach Ortsdefinition

Nach der Definition

„Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 (Brennpunkte) konstant ist und die mit F_1 und F_2 in derselben Ebene liegen.“

kann man eine Hyperbel punktweise mit Zirkel und Lineal konstruieren.



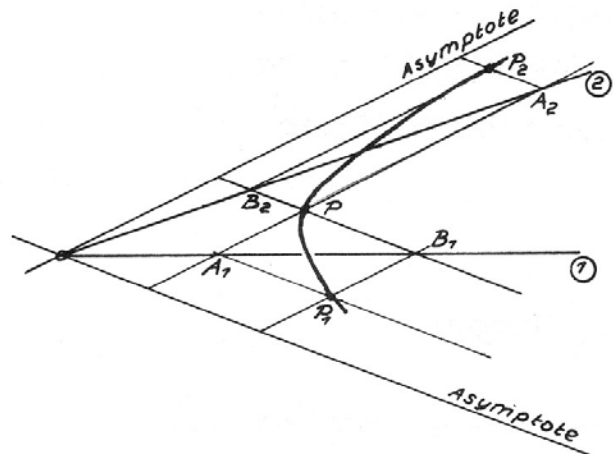
- Man markiere sich außerhalb von der Strecke \overline{AB} einen beliebigen Punkt T_1
- Man ziehe um F_2 einen Kreisbogen mit dem Radius $\overline{AT_1}$ und um F_1 einen Kreisbogen mit dem Radius $\overline{BT_1}$.
- Man wiederhole diesen Vorgang mit anderen gegebenen Punkten $T_2, T_3, \text{ usw.}$

2.2. Konstruktion auf Asymptoten bezogen

Gegeben seien die Asymptoten der Hyperbel sowie genau ein Punkt der Hyperbel. Weitere Punkte lassen sich wie folgt konstruieren:

Beispiel 1:

- Man zeichne eine beliebige Gerade durch den Schnittpunkt der Asymptoten.
- Man ziehe die Parallelen zu den Asymptoten durch den Punkt P .
- Durch die Schnittpunkte mit der „beliebigen Geraden“ entstehen die Punkte A_1 und B_1 .
- Der Schnittpunkt der Parallelen zu den Asymptoten durch A_1 und B_1 liefert einen weiteren Hyperbelpunkt.



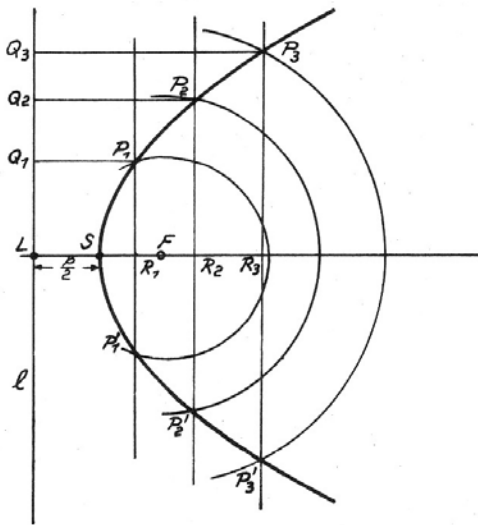
Beispiel 2 analog.

3. Parabel – Konstruktion nach Ortsdefinition

Nach der Definition

„Eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Entfernung von einem festen Punkt F (Brennpunkt) gleich dem Abstand von einer festen Geraden l (Leitlinie) ist und die mit F und l in einer Ebene liegen.“

kann man eine Parabel punktweise mit Zirkel und Lineal konstruieren.



- Man zeichne l und in L eine Senkrechte, auf der sich der Brennpunkt F befinde.
- In der Mitte der Strecke \overline{LF} befindet sich der Scheitelpunkt S der Parabel.
- Durch einen beliebigen Punkt R_1 zieht man eine Parallele zu l . Mit dem Radius $\overline{LR_1}$ schlägt man um F einen Kreisbogen.
- Die Schnittpunkte des Kreises mit der Parallelen zu l sind Punkte der Parabel.
- Weitere Punkte erhält man durch unterschiedliche Wahl von R_2, R_3 , usw.

4. Quellen

Demmig, Richard: Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel. Nauheim ³1977.