Ergänzung zu

10.4 Quadriken und ihre Normalform

Eine Quadrik in $\mathbb{R}_n$ ist definitionsgemäß die Menge aller Punkte $\mathbf{x}^\top = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, die im Standardkoordinatensystem K_0 einer Gleichung der Form

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + \alpha_0 = 0$$

genügen. Hierbei sind die symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, der Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und die Zahl $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Da die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch ist, ist sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich, deren Hauptdiagonalelemente die n reellen Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind. Für $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ folgt hieraus: Genau dann ist Null Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit $\mathrm{AV}_{\mathbf{A}}(0) = n - m$, wenn $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = m$ gilt. Im Hauptachsensystem hat die Quadrik eine Normalform, die man nach dem Wert von m klassifizieren kann.

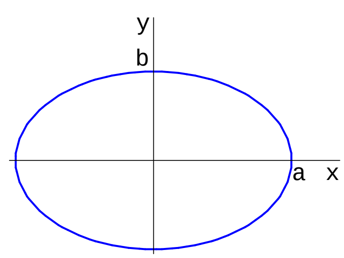
Wir geben eine Übersicht über die wichtigsten Normalformen von Quadriken in $\mathbb{R}_2$ (Kurven zweiter Ordnung) und $\mathbb{R}_3$ (Flächen zweiter Ordnung). Hierbei schreiben wir (x, y) statt (x_1, x_2) bzw. (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3). Im Folgenden bezeichnen a, b, c und p positive reelle Zahlen.

(1) Normalformen von Quadriken in $\mathbb{R}_2$

(1a) Null ist nicht Eigenwert von $\mathbf{A}$, also $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = 2$

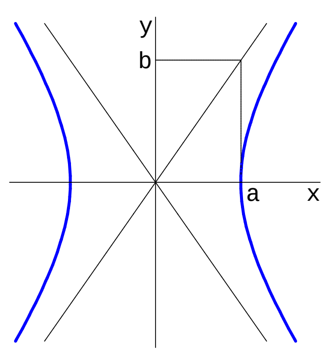
Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$



Hyperbel

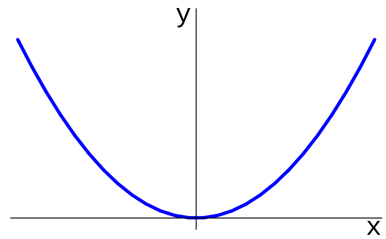
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$



(1b) Null ist Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit $\mathrm{AV}_{\mathbf{A}}(0) = 1$, also $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = 1$

Parabel

$$x^2 - 2py = 0.$$



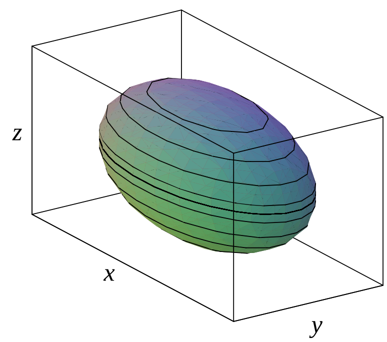
Hinzu kommen Geradenpaare als „ausgeartete“ Quadriken.

(2) Normalformen von Quadriken in $\mathbb{R}_3$

(2a) Null ist nicht Eigenwert von $\mathbf{A}$, also $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = 3$

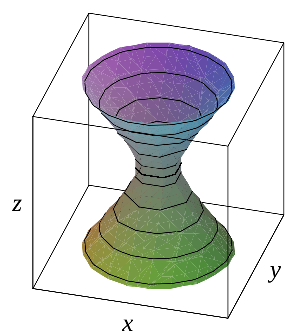
Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$



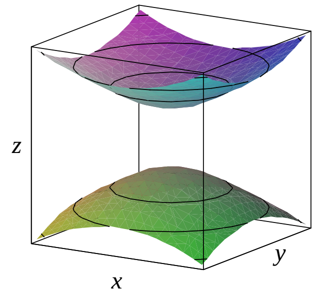
einschaliges Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$



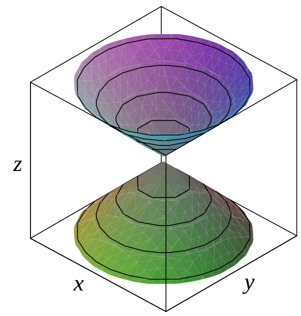
zweischaliges Hyperboloid

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$



Kegel

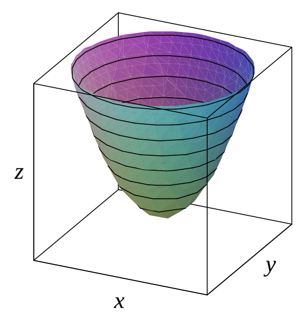
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



(2b) Null ist Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit $\mathrm{AV}_{\mathbf{A}}(0) = 1$, also $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = 2$

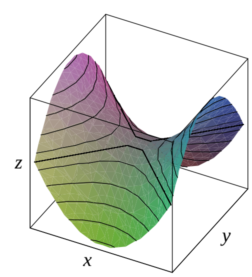
elliptisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0,$$



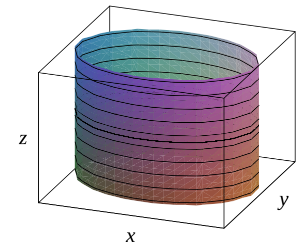
hyperbolisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0,$$



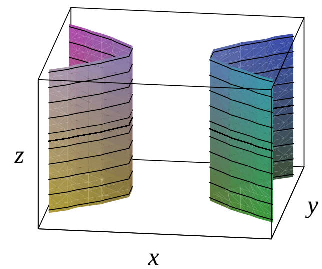
elliptischer Zylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$



hyperbolischer Zylinder

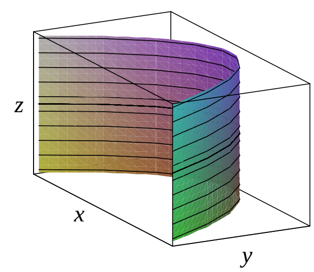
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$



(2c) Null ist Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit $\mathrm{AV}_{\mathbf{A}}(0) = 2$, also $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = 1$

parabolischer Zylinder

$$x^2 - 2py = 0.$$



Hinzu kommen „ausgeartete“ Quadriken, z. B. Ebenenpaare.