Ergänzung zu

9.5 Quadratmittellösungen linearer Gleichungssysteme

Hier stellen wir den Beweis von Hilfssatz 1 der Vorlesung zur Verfügung.

Wir betrachten für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ das LGS

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{1}$$

Hilfssatz 1. *Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sind die folgenden Aussagen (α) und (β) äquivalent:*
(α) *Das LGS (1) ist lösbar.*
(β) *Aus $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{y}^\top \mathbf{A} = \mathbf{o}_n^\top$ folgt $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} = 0$.*

Beweis. Zuerst führen wir einige Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbf{A}} := (\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)} \quad \text{(erweiterte Koeffizientenmatrix)},\\
&W_{\mathbf{A}} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{y}^\top \mathbf{A} = \mathbf{o}_n^\top\} \quad (\mathbf{o}_n: \text{ Nullelement von } \mathbb{R}^n),\\
&W_{\widetilde{\mathbf{A}}} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{y}^\top \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{o}_{n+1}^\top\},\\
&L_{\mathbf{A}^\top} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad L_{\mathbf{A}^\top}(\mathbf{y}) := \mathbf{A}^\top \mathbf{y},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned}$$

(α) $\Longrightarrow$ (β): Ist $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ und gilt $\mathbf{y}^\top \mathbf{A} = \mathbf{o}_n^\top$, so folgt

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{b} = \mathbf{y}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{y}^\top \mathbf{A})\mathbf{x} = 0.$$

(β) $\Longrightarrow$ (α): Wir zeigen $\mathrm{Rang}(\widetilde{\mathbf{A}}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{A})$; dies impliziert ($\alpha$) nach 7.1 Theorem 1. Es gilt

$$\mathbf{y} \in W_{\mathbf{A}} \Longleftrightarrow (\mathbf{y}^\top \mathbf{A})^\top = \mathbf{o}_n \Longleftrightarrow \mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{o}_n \Longleftrightarrow \mathbf{y} \in \mathrm{Kern}(L_{\mathbf{A}^\top}).$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
\dim W_{\mathbf{A}} &= \dim \mathrm{Kern}(L_{\mathbf{A}^\top}) = \dim \mathbb{R}^m - \mathrm{Rang}\,(L_{\mathbf{A}^\top})\\
&= m - \mathrm{Rang}\,(\mathbf{A}^\top) = m - \mathrm{Rang}\,(\mathbf{A});
\end{aligned} \tag{2}$$

hierbei ergibt sich das zweite Gleichheitszeichen aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen (5.2 Theorem 1). Analog erhält man

$$\dim W_{\widetilde{\mathbf{A}}} = m - \mathrm{Rang}(\widetilde{\mathbf{A}}). \tag{3}$$

Stets gilt $W_{\widetilde{\mathbf{A}}} \subseteq W_{\mathbf{A}}$. Wegen ($\beta$) gilt nun auch $W_{\mathbf{A}} \subseteq W_{\widetilde{\mathbf{A}}}$. Also ist $W_{\widetilde{\mathbf{A}}} = W_{\mathbf{A}}$, und mit (3) und (2) folgt $\mathrm{Rang}\,(\widetilde{\mathbf{A}}) = \mathrm{Rang}\,(\mathbf{A})$. $\square$