Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Schirotzek / Dr. H.-P. Scheffler

WS 2010/2011

Lineare Algebra für Physiker

Blatt 7

Endomorphismen in Skalarprodukträumen

74. Sei V ein endlichdimensionaler reeller bzw. komplexer Skalarproduktraum und $L : V \to V$ ein orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus. Beweisen Sie folgende Aussagen:
    a) Für jeden Eigenwert λ von V ist $|\lambda| = 1$.
    b) Für alle $u, v \in V$ gilt: $L(u) \perp L(v) \Longleftrightarrow u \perp v$.
    c) Sei nun V reell, $\dim V$ ungerade und $\mathbf{A}$ die Abbildungsmatrix von L bez. einer beliebigen Basis. Dann ist $\lambda := \det \mathbf{A}$ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ und L.

75. Ermitteln Sie die Matrix der Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an der Ebene
$$\{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 0\}.$$

76. Gegeben seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Weiter sei $\mathbf{A}_z := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
    a) Welche geometrische Bedeutung hat $\mathbf{A}_z$ und was beschreibt der Ausdruck $\frac{1}{2}(\mathrm{spur}(\mathbf{A}_z) - 1)$?
    b) Berechnen Sie die Inverse sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}_z$.

77. Ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ orthogonal und gilt $\det(\mathbf{A}) = 1$, so heißt $\mathbf{A}$ **Drehmatrix** (vgl. Abschnitt 5.3 der Vorlesung).
    a) Zeigen Sie, dass jede Drehmatrix $\mathbf{A}$ den Eigenwert 1 besitzt. Welche Bedeutung hat ein zugehöriger Eigenvektor?
    b) Überprüfen Sie, ob die Matrix $\mathbf{A} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ eine Drehmatrix ist. Bestimmen Sie ggf. die Drehachse und den Drehwinkel sowie eine Basis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich der der von $\mathbf{A}$ erzeugte Endomorphismus $L_{\mathbf{A}}$ eine Abbildungsmatrix der Form $\mathbf{A}_z$ (s. Aufgabe 76) hat.
    c) Bestimmen Sie die Matrix einer Drehung des $\mathbb{R}^3$ bez. der Achse $\mathrm{Lin}((0, 1, 0)^T)$ („y-Achse“) um den Winkel $\pi/3$.
    d) Berechnen Sie die Matrix einer Drehung des $\mathbb{R}^3$ bez. der Achse $\mathrm{Lin}((1, 1, 1)^T)$ um den Winkel $\pi/2$.

78. Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit:
$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

79. Gegeben seien die Matrizen
$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformieren Sie jeweils die zugehörige quadratische Form $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ in eine rein quadratische Form.

80. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n)^\top \mapsto f(x_1, \ldots, x_n),$$

besitze in einer Umgebung von $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung bez. aller Variablen, und diese seien an der Stelle $\mathbf{a}$ stetig. Wir schreiben $\partial_k f$ für die partielle Ableitung von f nach x_k und $\partial_{ik} f := \partial_i(\partial_k f)$. Die – wegen der Stetigkeitsvoraussetzung symmetrische – (n, n)-Matrix

$$\mathrm{H}f(\mathbf{a}) := \begin{pmatrix} \partial_{11} f(\mathbf{a}) & \ldots & \partial_{1n} f(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1} f(\mathbf{a}) & \ldots & \partial_{nn} f(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

heißt **Hesse-Matrix** von f an der Stelle $\mathbf{a}$. In der Analysis wird Folgendes gezeigt:

- Ist $\mathbf{a}$ eine lokale Extremstelle von f, dann ist $\mathbf{a}$ eine **kritische Stelle** von f, d.h., es gilt $\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) := (\partial_1 f(\mathbf{a}), \ldots, \partial_n f(\mathbf{a}))^\top = \mathbf{o}$.
- Ist $\mathbf{a}$ eine kritische Stelle von f und ist die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f(\mathbf{a})$ positiv definit (bzw. negativ definit bzw. indefinit), so ist $\mathbf{a}$ eine lokale Minimumstelle (bzw. eine lokale Maximumstelle bzw. keine lokale Extremstelle) von f.

Berechnen Sie alle lokalen Extremstellen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2(x_1 + 1) + x_2^2(x_1 - 1)$, b) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 15x_1 - 12x_2$.

Elemente der analytischen Geometrie

81. Gegeben seien in $\mathbb{R}_3$ die Punkte $A = (1, 5, 7), B = (-1, 3, 6)$ und $C = (0, 4, 5)$.

a) Zeigen Sie, dass diese Punkte eine Ebene E aufspannen.

b) Ermitteln Sie einen Normalenvektor der Ebene E und beschreiben Sie die Ebene E in einer parameterfreien Form.

c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (2, 0, 3)$ von E.

d) Ermitteln Sie den Winkel zwischen der Geraden G durch den Punkt O mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{OA}$ und der Ebene E.

e) Welche Koordinaten hat der Spiegelpunkt des Nullpunktes bez. der Ebene E?

82. Durch die folgenden Gleichungen werden Punktmengen von $\mathbb{R}_2$ bzw. $\mathbb{R}_3$ beschrieben. Ermitteln Sie den Typ dieser Mengen über eine Hauptachsentransformation.

a) $7x_1^2 + 13x_2^2 + 6\sqrt{3}x_1x_2 - 12(\sqrt{3} + 4)x_1 - 12(4\sqrt{3} - 1)x_2 = -164$,

b) $16x_1^2 + 24x_1x_2 + 9x_2^2 + 60x_1 - 80x_2 = 0$,

c) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 20x_1 - 10x_2 + 16 = 0$,

d) $6x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2 - \frac{4}{3} = 0$,

e) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 30x_1 - 12x_2 + 24x_3 = -69$,

f) $x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 - 10x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_3(x_1 - x_2) - 1 = 0$.