Institut für Analysis
Prof. Dr. J. Voigt, Dr. M. Waurick

Übungsblatt 4
16. 5. 2012

Funktionentheorie

13. Für $\sigma \in \mathbb{C}$ sei $f_\sigma\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_\sigma(z) := \exp(\sigma \operatorname{Ln} z)$$

mit dem Hauptzweig Ln des Logarithmus (siehe Aufgabe 6). Zeige:

(a) Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f_n(z) = z^n \ \ (z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.

(b) Für alle $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$ gilt $f_\sigma \cdot f_\tau = f_{\sigma+\tau}$.

(c) Für alle $\sigma \in [-1, 1],\ \tau \in \mathbb{C}$ gilt $f_\tau \circ f_\sigma = f_{\tau\sigma}$. Gilt dies auch für beliebige $\sigma \in \mathbb{C}$?

(d) Für $|z| < 1$ gilt $f_\sigma(1 + z) = b_\sigma(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\sigma}{k} (z)^k$.

Hinweis: Taylor-Entwicklung von f_σ um $z_0 = 1$.

(e) Für $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ hat die binomische Reihe $b_\sigma(z)$ den Konvergenzradius 1.

14. Bestimme die Potenzreihenentwicklung mit dem Mittelpunkt $z_0 \neq a$ für die Funktionen

$$f_0(z) = \frac{1}{z-a}, \qquad f_1(z) = \frac{1}{(z-a)^2}, \qquad f_2(z) = \frac{1}{(z-a)^3}.$$

Hinweis: Beachte, $f_1 = -f_0'$ und $f_2 = -\frac{1}{2} f_1'$.

15. (a) Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ be open and connected. Show that Ω is pathwise connected.

Hint: For $x_0 \in \Omega$ consider the set

$$U := \big\{ x \in \Omega;\ \text{there exists a path in } \Omega \text{ connecting } x_0 \text{ and } x \big\}.$$

(b) Let $M := \big\{ (x, \cos\frac{1}{x});\ x > 0 \big\} \cup \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Decide (with proof!), whether M is connected or pathwise connected.

16. Sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) := 2e^{it}$. Berechne mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformeln für die Ableitungen das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ der folgenden Funktionen:

(a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$, (b) $f(z) = \dfrac{z^3}{(z+i)^3}$,

(c) $f(z) = \dfrac{z \cdot \cos z}{(z - \frac{\pi}{2})^2}$, (d) $f(z) = \dfrac{z \cdot e^z}{(z-4)^3}$.

Abgabetermin: Freitag, 25. 5. 2012, bis 13:00 Uhr im blauen Kasten bei WIL C 239. Besprechung der Aufgaben in der Übung am 6. 6. 2012