Institut für Analysis
Prof. Dr. J. Voigt, Dr. M. Waurick

Übungsblatt 6
13. 6. 2012

Funktionentheorie

21. (a) (Satz von Casorati-Weierstraß) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r_0 > 0$, $f\colon B(z_0, r_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, z_0 wesentliche Singularität. Zeige: $f\big(B(z_0, r) \setminus \{z_0\}\big)$ ist dicht in $\mathbb{C}$ für alle $r \in (0, r_0)$.

Bemerkung: Der große Satz von Picard besagt sogar, dass entweder $f\big(B(z_0, r) \setminus \{z_0\}\big) = \mathbb{C}$ oder $f\big(B(z_0, r) \setminus \{z_0\}\big) = \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ für ein $w_0 \in \mathbb{C}$ gilt.

(b) Zeige direkt (ohne Verwendung des großen Satzes von Picard), dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \exp(1/z)$$

in jeder punktierten Umgebung von 0 jeden Wert $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ annimmt.

22. (a) Show: If f has a pole of second order in z_0, then

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\big((z - z_0)^2 f(z)\big).$$

(b) Compute the integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$ with the help of the residue theorem.

23. (a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) Jeder stückweise stetig differenzierbare Zykel in Ω ist nullhomolog in Ω;

(ii) jeder geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Weg in Ω ist nullhomolog in Ω;

(iii) jede auf Ω holomorphe Funktion besitzt eine Stammfunktion.

Hinweis: Benutze ohne Beweis: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend. Dann gibt es für alle $x, y \in \Omega$ einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$; siehe auch Aufgabe 15.

(b) Seien $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganze Funktionen, und für alle $z \in \mathbb{C}$ sei $|f(z)| \leqslant |g(z)|$. Zeige: Es gibt $\alpha \in \mathbb{C}$, so dass $f = \alpha g$.

24. Sei f holomorph in einer Umgebung von $B[0, 1] \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Es gelte $|f(z)| < 1$ für $|z| = 1$. Wieviele Fixpunkte hat f in $B(0, 1)$, d. h. wie viele Lösungen hat dort die Gleichung $f(z) = z$?

(b) Es gelte $|f(z)| > 2$ für $|z| = 1$ und $f(0) = 1$. Muss f eine Nullstelle in $B(0, 1)$ haben?

Abgabetermin: Freitag, 29. 6. 2012, bis 13:00 Uhr im blauen Kasten bei WIL C 239. Besprechung der Aufgaben in der Übung am 4. 7. 2012